Самогравитация облака Больцмановского газа

Губанов Сергей Юрьевич*

22 марта 2011 г.

Аннотация

Решена задача самогравитации облака Больцмановского газа (гравитация порождается облаком, а облако гравитацией). Этот гравитационный объект даёт асимптотически плоскую ротационную кривую. Согласно расчётам, наблюдаемого межгалактического водорода, видимо, достаточно для закрытия проблемы ”тёмной материи”.

Введение. У большинства галактик ротационные кривые асимптотически плоские [1]. Для галактик асимптотическое значение скорости – сотни километров в секунду, для скоплений галактик – тысячи километров в секунду. Температура обнаруженного межгалактического водорода во внешних областях галактик составляет 10^6 – 10^8 K, что как раз и соответствует средней скорости движения атомов водорода в сотни и тысячи километров в секунду. Плотность газа внутри галактик – единицы атомов на кубический сантиметр, далеко за пределами падает до менее единицы на кубический метр. Скорости частиц нерелятивистские, плотность газа ничтожна, с огромным запасом газ можно считать Больцмановским. Представляет интерес решение задачи самогравитации облака Больцмановского газа.

Вывод уравнения равновесия. Ошибочно думать будто частицы не падают в центр облака из-за давления. В Больцмановском облаке частицы в центр свободно падают, но ни с кем там не столкнувшись пролетают его по инерции насквозь. Из-за сильной разряженности облака каждая частица движется совершенно свободно. Температура Больцмановского облака постоянна. Внутри звёзд другое дело, там газ плотный и его температура растёт по мере приближения к центру. Столкновения между частицами часты, давление играет существенную роль. Если сила гравитации превысит силу давления газа, то звезда коллапсирует. Поэтому уравнения равновесия звёзд строят на балансе давлений сверху и снизу на выделенный бесконечно малый элемент. В Больцмановском газе всё иначе. Частицы не сталкиваясь свободно падают в гравитационном поле. *Уравнение равновесия Больцмановского облака нельзя получить методом баланса давлений.*

Я полагаю, уравнение равновесия Больцмановского облака можно вывести следующим способом. Как описано в [2], концентрация Больцмановского газа находящегося при постоянной температуре T во внешнем поле $U(\vec{r})$ определяется следующей формулой:

$$n(\vec{r}) = n_0(V, N, T)\, \exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{kT}\right). \tag{1}$$

*s.yu.gubanov@inbox.ru

Зависимость $n_0(V,N,T)$ от объёма V, числа частиц N и температуры T определяется из условия нормировки на полное число частиц:

$$\int\limits_V n(\vec{r})\,dV = N. \tag{2}$$

У нерелятивистского газа концентрация $n(\vec{r})$ и плотность $\rho(\vec{r})$ пропорциональны. Поэтому для плотности газового облака находящегося в гравитационном поле с Ньютоновским потенциалом $\phi(r)$ можно записать:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0\, \exp\left(-\frac{m\,\phi(\vec{r})}{kT}\right), \tag{3}$$

здесь m – масса частицы. Однако, условие нормировки (2) в рассматриваемом случае неприменимо поскольку количество частиц бесконечно. Приходиться рассматривать ρ_0 как независимый параметр. Если мы примем условие $\phi(0)=0$, то физический смысл ρ_0 – плотность газа в центре облака.

Составляем уравнение Ньютоновского гравитационного поля, в правую часть которого подставляем выражение (3) для плотности газа:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho_0\, \exp\left(-\frac{m\,\phi(\vec{r})}{kT}\right). \tag{4}$$

Это и есть искомое уравнение статистического гравитационного баланса Больцмановского облака.

Решение. Нас интересует сферически симметричное решение с граничными условиями $\phi(0)=0$ и $\phi'(0)=0$. Вот несколько первых членов разложения такого решения в ряд по r в окрестности $r=0$ для плотности газа, гравитационного потенциала и первой космической скорости:

$$\rho(r) = \rho_0 - \frac{2\pi G m\rho_0^2}{3kT}\,r^2 + \frac{16\pi^2G^2m^2\rho_0^3}{45k^2T^2}\,r^4 + \ldots, \tag{5}$$

$$\phi(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_0\,r^2 - \frac{2\pi^2G^2m\rho_0^2}{15kT}\,r^4 + \ldots \tag{6}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{3}}\,r - \frac{2\pi^{3/2}G^{3/2}\rho_0^{3/2}}{5\sqrt{3}kT}\,r^3 + \ldots \tag{7}$$

При $r\to\infty$ получаем (точное решение):

$$\rho(r) = \frac{kT}{2\pi Gm}\,\frac{1}{r^2}, \tag{8}$$

$$\phi(r) = \frac{kT}{m}\log\frac{2\pi Gm\rho_0 r^2}{kT}, \tag{9}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{10}$$

Численное интегрирование. Численное интегрирование для центральных концентраций ρ_0 равных 10, 100 и 1000 атомов водорода на кубический сантиметр, при температуре T равной 2.5×10^6 градусов Кельвина даёт следующие графики концентрации (рис. 1) и скорости (рис. 2).

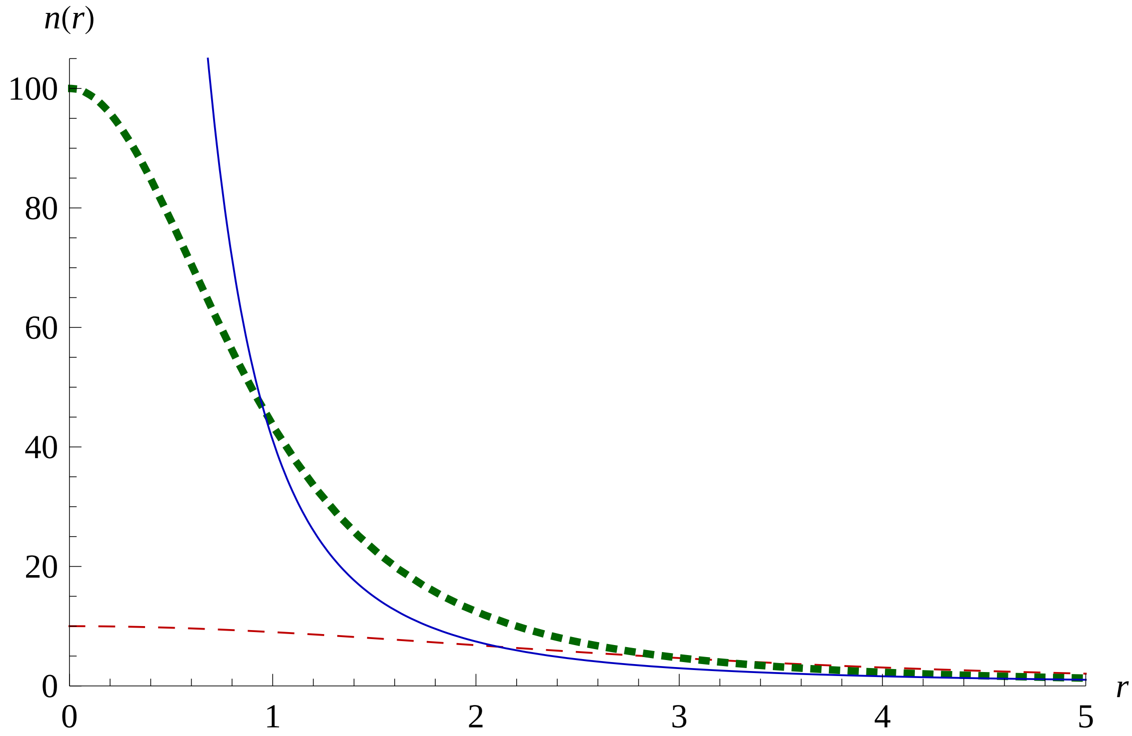

Рисунок 1. Концентрация $n(r)$. $\mathrm{T} = 2.5 \times 10^6$ K.
Расстояние в килопарсеках, концентрация в штуках на кубический сантиметр.
Графики для n_0 равной 10, 100 и 1000 атомов водорода в кубическом сантиметре.

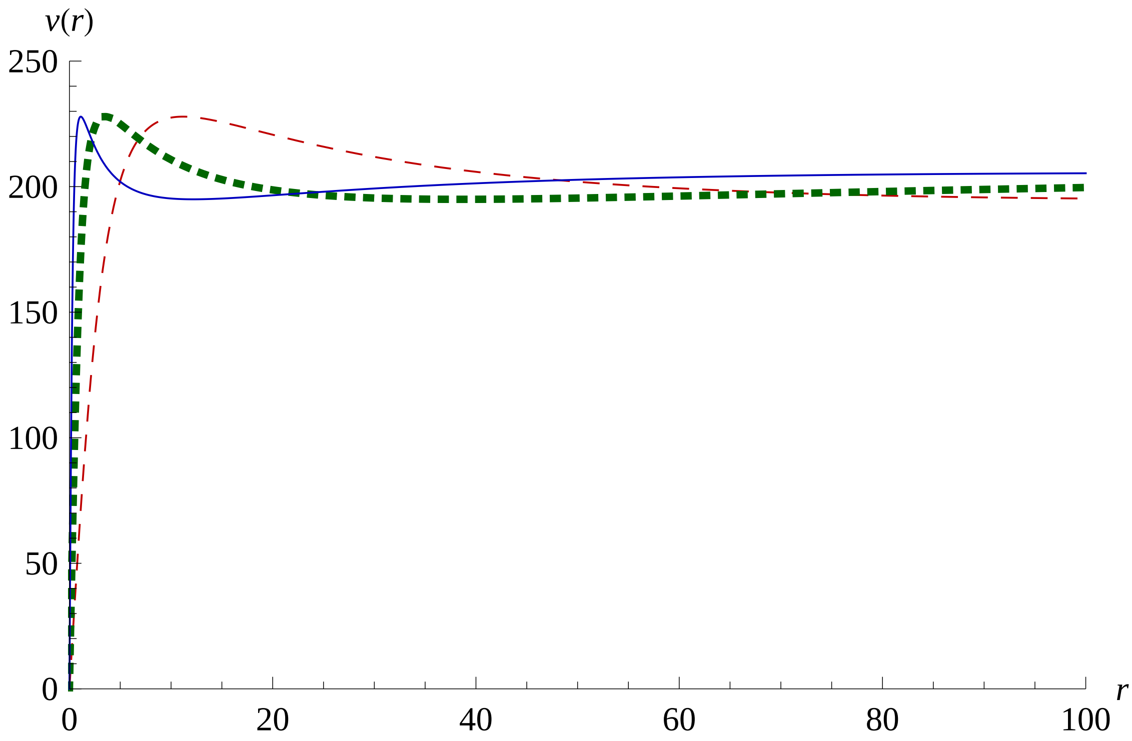

Рисунок 2. Ротационные кривые $v(r)$. $\mathrm{T} = 2.5 \times 10^6$ K.
Расстояние в килопарсеках, скорость в километрах в секунду.
Графики для n_0 равной 10, 100 и 1000 атомов водорода в кубическом сантиметре.

Обсуждение. Пришлось использовать необычный выбор гравитационного потенциала. Он равен нулю в центре облака. Обычно Ньютонов потенциал выбирают равным нулю на бесконечности, но в данной задаче это невозможно. Дело в том, что масса облака линейно расходится с расстоянием, гравитационный потенциал растёт до бесконечности.

На некотором расстоянии от центра облака потенциал становится столь велик, что вторая космическая скорость равна скорости света. Значит, казалось бы, классическая физика неприменима, проделанные вычисления напрасны. Но давайте оценим это граничное расстояние. Поскольку потенциал растёт логарифмически, то граничное расстояние очерчивающее область применимости классической физики оказывается на сотни тысяч порядков превышающим размер видимой части Вселенной. Поэтому, несмотря на неограниченность роста потенциала, искать релятивистское решение этой задачи имеет практический смысл только для облака космологических размеров.

Заключение. Гравитационный баланс плотного газового шара и Больцмановского облака имеют различное физическое описание (статистика против динамики). Выведено уравнение статистического гравитационного баланса Больцмановского облака. Найдено решение, которое, видимо, закрывает проблему "тёмной материи" необходимой для объяснения асимптотически плоских ротационных кривых. Уравнение получено классическое, но релятивистское описание имеет смысл лишь для облака космологических размеров.

Список литературы

[1] Б. М. Барбашов, В. Н. Первушин, Д. В. Проскурин *"Экскурс в современную космологию"*, Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2003. Т. 34, выпуск 7.

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *"Статистическая физика. Часть 1"*, Издание 5-е. М.: Физматлит, 2005. 616 с. ("Теоретическая физика", том V). ISBN 5-9221-0054-8