Элементарное введение в технику построения систем отсчёта

Губанов Сергей Юрьевич*

13 октября 2008 г.

Аннотация

Даётся элементарное введение в технику построения систем отсчёта.

В литературе можно встретить утверждения будто в равноускоренной системе отсчёта метрика пространства событий имеет такой вид:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dx - \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} dt \right)^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1}$$

а во вращающейся системе отсчёта такой:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - (d\varphi - \Omega\, dt)^2 - dz^2. \tag{2}$$

Подобные утверждения ошибочны. В данном случае метрики записаны с использованием движущихся координатных систем, только и всего. Смены системы отсчёта нет.

Системы отсчёта и системы координат. Система отсчёта и система координат – разные вещи. Вот, например, когда пишут

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{3}$$

то тем самым задают метрический тензор пространства событий в декартовой системе координат. *Система координат* – это способ с помощью которого перенумерованы (в данном случае все) точки пространства событий. Для того чтобы задать ещё и *систему отсчёта* необходимо в каждой точке пространства событий задать четыре вектора – базисных направления этой системы отсчёта. Конечно, в декартовой системе координат, по умолчанию, подразумевается, "обычный" векторный базис:

$$e_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{4}$$

и "обычный" ко-векторный базис:

$$\theta^0 = c\, dt, \quad \theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy, \quad \theta^3 = dz. \tag{5}$$

Вот эти-то базисные (ко-)векторные поля и задают систему отсчёта. Поскольку в данном случае они тривиальны, то о них забывают вовсе. Однако при построении иных систем отсчёта, именно (ко-)векторный базис и нужно построить в первую очередь. Только после того как такой базис будет построен, можно будет задуматься о введении в пространстве событий новой системы координат, такой, чтобы векторы нового базиса были бы касательными к "осям" новой координатной системы (или, хотя бы, сонаправлены им). Но это далеко не всегда возможно! Если дифференциальные формы ко-векторного базиса не представимы (с помощью каких либо интегрирующих множителей) в виде полных дифференциалов, то новую координатную систему ввести не представляется возможным.

*http://elementy.ru/blogs/users/SergeyGubanov/

Как строить системы отсчёта? Техника построения векторного базиса довольно проста. Начинают с векторного поля e_0. Оно задаёт в каждой точке пространства событий времениподобный вектор – направление увеличения собственного времени движущегося физического объекта (пробной частицы). Его компоненты равны dx^μ/ds – компонентам касательного вектора к мировой линии движущейся через эту точку частицы. Считается что есть континуум пробных частиц. Таким образом, в каждой точке пространства событий определён соответствующий вектор с компонентами dx^μ/ds, а в целом задано векторное поле e_0. Далее, с помощью процесса ортогонализации, достраиваются ещё три векторных поля e_1, e_2 и e_3.

Немножко формул. Прежде чем перейти к примерам, приведём немножко справочных формул. Определение компонент векторного и ко-векторного базисов:

$$e_a \equiv e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{6}$$

$$\theta^a \equiv \theta^a_\mu dx^\mu. \tag{7}$$

Метрика:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab}\theta^a\theta^b \equiv \left(\theta^0\right)^2 - \left(\theta^1\right)^2 - \left(\theta^2\right)^2 - \left(\theta^3\right)^2. \tag{8}$$

Ортонормированность:

$$g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \tag{9}$$

$$\eta_{ab}\theta^a_\mu\theta^b_\nu = g_{\mu\nu}, \tag{10}$$

$$e_a^\mu\theta^a_\nu = \delta^\mu_\nu, \tag{11}$$

$$\theta^a_\mu e_b^\mu = \delta^a_b. \tag{12}$$

То есть, матрица θ^a_μ равна транспонированной обратной матрице e_a^μ.

Пример 1. Переход из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Пусть в пространстве событий задана декартовая система координат

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{13}$$

Ещё задана неподвижная (инерциальная) система отсчёта с базисом

$$e_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{14}$$

Относительно неё, по направлению e_1 (то есть вдоль оси x) по закону

$$\frac{dx}{dt} = V \tag{15}$$

движется континуум пробных тел. Нам надо построить систему отсчёта сопутствующую этим телам. Сначала находим чему равен дифференциал ds движущейся частицы:

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{16}$$

Теперь находим компоненты вектора собственного времени движущейся частицы:

$$\frac{d(ct)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,\frac{V}{c}, \quad \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 0. \tag{17}$$

Значит, векторное поле e_0' такое:

$$e_0' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(e_0 + \frac{V}{c}\,e_1\right). \tag{18}$$

Строим ортогональные к нему (и друг к другу) векторные поля e'_1, e'_2 и e'_3, получаем:

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left(\frac{V}{c}\, e_0 + e_1 \right), \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3. \tag{19}$$

Собственно, определение полей e'_1, e'_2 и e'_3 довольно произвольно, мы выбрали такое соответствие, которое при $V \to 0$ становится тождественным. Теперь, находим θ^a_μ – транспонированную обратную матрицу к e^μ_a. Для дифференциальных форм ко-векторного базиса получаем:

$$\theta'^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left(\theta^0 - \frac{V}{c}\, \theta^1 \right), \quad \theta'^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left(-\frac{V}{c}\, \theta^0 + \theta^1 \right), \quad \theta'^2 = \theta^2, \quad \theta'^3 = \theta^3. \tag{20}$$

Вот и всё!!! Сопутствующая система отсчёта построена. Ничего больше делать не надо. Всё готово!!!

И вот теперь, уже после того как сопутствующая система отсчёта полностью построена, нам на ум может придти мысль ввести в пространстве событий новую систему координат, такую чтобы базисные векторы e'_a были касательными к её координатным осям (или, хотя бы, сонаправлены им). Для введения таких координат надо чтобы дифференциальные формы θ'^a можно было бы представить (быть может используя какие-либо интегрирующие множители) как полные дифференциалы этих самых новых координат. В общем случае это невозможно, но в данном – можно. В данном случае в пространстве событий оказывается возможным ввести новую систему координат $\{ct', x', y', x'\}$ такую, что:

$$\theta'^0 = c\, dt', \quad \theta'^1 = dx', \quad \theta'^2 = dy', \quad \theta'^3 = dz'. \tag{21}$$

При этом, связь новых координат со старыми оказывается такой:

$$c\, t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left(c\, t - \frac{V}{c}\, x \right), \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left(x - V\, t \right), \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{22}$$

Да. Да. Да. Это обычное преобразование Лоренца. Только мы его вывели очень заумным способом. Зато теперь мы знаем как надо строить произвольные системы отсчёта.

Пример 2. Переход в равноускоренную систему отсчёта. Всё тоже самое как и в первом примере, только теперь скорость движущихся тел не постоянна, а растёт со временем по закону:

$$\frac{dx}{dt} = V(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}, \tag{23}$$

(при этом в собственной системе отсчёта эти частицы ускоряются с постоянным ускорением a). Проделывая тоже самое, что и в первом примере, получаем:

$$\theta'^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}} \left(\theta^0 - \frac{V(t)}{c}\, \theta^1 \right), \quad \theta'^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}} \left(-\frac{V(t)}{c}\, \theta^0 + \theta^1 \right), \quad \theta'^2 = \theta^2, \quad \theta'^3 = \theta^3. \tag{24}$$

И опять, на этом можно сказать: ”Всё, сопутствующая система отсчёта построена”. Но мы хотим, ещё и систему координат поменять. Давайте попробуем. Так как поле скоростей $V(t)$ теперь не постоянное, то дифференциальные формы θ'^0 и θ'^1 полными дифференциалами теперь не являются. Это означает, что не существует системы координат к координатным осям которой векторы e'_0 и e'_1 были бы касательными (во всех точках пространства событий). Однако, ещё не всё потеряно. Оказывается можно ввести такую систему координат, для которой векторы e'_0 и e'_1 будут сонаправлены касательным векторам координатных осей. В данном случае это возможно потому, что дифференциальные формы θ'^0 и θ'^1 можно представить в виде полных дифференциалов домножив их на специальным образом подобранные интегрирующие множители. Разумеется, эти множители потом войдут в метрический тензор записанный в новых координатах. Новые координаты вводим так:

$$\frac{V(t)\,dt'(t,x)}{\sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}}\left(c\,dt - \frac{V(t)}{c}\,dx\right), \tag{25}$$

$$\frac{dx'(t,x)}{\sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}}\left(dx - V(t)dt\right), \tag{26}$$

$$dy' = dy, \tag{27}$$

$$dz' = dz. \tag{28}$$

Для $t > 0$ (новые координаты не покрывают всего пространства событий!!!) после интегрирования получаем:

$$c\,t' = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} + \ln\left(\frac{\frac{at}{c}}{1+\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}\right)\right) - x, \tag{29}$$

$$x' = x - \frac{c^2}{a}\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}, \tag{30}$$

$$y' = y, \tag{31}$$

$$z' = z. \tag{32}$$

Наоборот:

$$t = \frac{c}{a}\frac{1}{\sinh\left(\frac{a}{c^2}(c\,t'+x')\right)}, \tag{33}$$

$$x = \frac{c^2}{a}\coth\left(\frac{a}{c^2}(c\,t'+x')\right), \tag{34}$$

$$y = y', \tag{35}$$

$$z = z'. \tag{36}$$

Окончательно, метрика части пространства событий в новых координатах:

$$ds^2 = \frac{c^2dt'^2}{\sinh^2\left(\frac{a}{c^2}(c\,t'+x')\right)} - \coth^2\left(\frac{a}{c^2}(c\,t'+x')\right)dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \tag{37}$$

Всё пространство событий из ускоренной системы отсчёта не видно.

Именно метрика (37), а не метрика (1) является метрикой области пространства событий видимого из равноускоренной системы отсчёта.

Пример 3. Переход во вращающуюся систему отсчёта. Пусть в пространстве событий задана цилиндрическая система координат

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2. \tag{38}$$

Ещё задана неподвижная (инерциальная) система отсчёта с базисом

$$e_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{39}$$

Относительно неё, по направлению e_2 (то есть вдоль увеличения угла φ) по закону

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega \tag{40}$$

вращается континуум пробных тел. Нам надо построить систему отсчёта сопутствующую этим телам. Сначала находим чему равен дифференциал ds движущейся частицы:

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{41}$$

здесь $V \equiv \Omega\, r$. Теперь находим компоненты вектора собственного времени движущейся частицы:

$$\frac{d(ct)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{dr}{ds} = 0, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,\frac{\Omega}{c}, \quad \frac{dz}{ds} = 0. \tag{42}$$

Значит, векторное поле e'_0 такое:

$$e'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(e_0 + \frac{V}{c}\, e_2\right). \tag{43}$$

Строим ортогональные к нему (и друг к другу) векторные поля e'_1, e'_2 и e'_3, получаем:

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{V}{c}\, e_0 + e_2\right), \quad e'_3 = e_3. \tag{44}$$

Теперь, находим θ^a_μ – транспонированную обратную матрицу к e^μ_a. Для дифференциальных форм ко-векторного базиса получаем:

$$\theta'^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\theta^0 - \frac{V}{c}\,\theta^2\right), \quad \theta'^1 = \theta^1, \quad \theta'^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(-\frac{V}{c}\,\theta^0 + \theta^2\right), \quad \theta'^3 = \theta^3. \tag{45}$$

Вращающаяся система отсчёта построена. Больше ничего сделать нельзя, так как дифференциальная форма

$$\theta'^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}\left(c\, dt - \frac{\Omega\, r^2}{c}\, d\varphi\right) \tag{46}$$

не представима в виде полного дифференциала (ни с каким интегрирующим множителем), то есть невозможно ввести некую "времениобразную" переменную t' которая бы нумеровала гиперповерхности постоянного времени $t' = const$.

Расстояния. Принято считать, что трехмерное (физическое) пространство является гиперповерхностью постоянного времени $t = const$ в четырёхмерном пространстве событий. Как мы только что показали на примере вращающейся системы отсчёта, такую гиперповерхность $t = const$ определить далеко не всегда возможно. Мы приходим к выводу, что в теории относительности следует расширить понятие трёхмерного (физического) пространства с гиперповерхности задаваемой алгебраическим уравнением $t = const$, на некий дифференциально-геометрический объект (я не знаю, есть ли для него у математиков специальное название) как-то обозначаемый одной лишь дифференциальной связью:

$$\theta^0 = 0. \tag{47}$$

В частном случае, когда θ^0 пропорциональна дифференциалу dt дифференциальная связь (47) превращается в обычное $t = const$. Для вращающейся системы отсчёта, как это видно из (46) дифференциальная связь такова:

$$c\, dt - \frac{\Omega\, r^2}{c}\, d\varphi = 0. \tag{48}$$

Такую дифференциальную связь нельзя проинтегрировать, но она есть и выделяет в пространстве событий физическое пространство. Метрика пространства получается в результате решения следующей системы дифференциальных связей:

$$\theta^0 = 0, \tag{49}$$

$$d\ell^2 = \left(\theta^1\right)^2 + \left(\theta^2\right)^2 + \left(\theta^3\right)^2. \tag{50}$$

Метрика $d\ell$ и определяет физические расстояния (измеряемые линейкой) в этой системе отсчёта.

Получим, например, расстояния во вращающейся системе отсчёта. Выписываем систему дифференциальных связей:

$$\begin{aligned} c\,dt - \frac{\Omega\, r^2}{c}\, d\varphi &= 0, & (51) \\ d\ell^2 &= dr^2 + \left(\frac{r\,d\varphi - \Omega\, r\, dt}{\sqrt{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}\right)^2 + dz^2. & (52) \end{aligned}$$

Выражаем dt из первой связи и подставляем её во вторую, получаем:

$$d\ell^2 = dr^2 + \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right) r^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{53}$$

Следует ещё раз напомнить, что координаты и система отсчёта – это разные вещи, в этой формуле координаты r, φ и z – это те же самые координаты, что и в формуле (38), то есть это те же самые координаты, которые в неподвижной системе отсчёта определяют её метрику:

$$d\ell_0^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{54}$$

Например, если в неподвижной системе отсчёта длина дуги окружности радиуса R равна ℓ_0, то во вращающейся системе отсчёта она короче: $\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{\Omega^2 R^2}{c^2}}$, это обычное лоренцево сокращение длины.

Конец. Как видите, ничего сложного в технике построения систем отсчёта нет. Самое страшное здесь может возникнуть только с попыткой наглядной интерпретации неинтегрируемых дифференциальных связей при определении трёхмерной метрики.