Общая космологическая модель с плоским пространственным сечением

Губанов Сергей Юрьевич*

21 мая 2015 г.

Аннотация

Найдено общее решение системы уравнений ОТО с плоским пространственным сечением с учётом лямбда члена и идеальной пыли. Решения Шварцшильда, Фридмана и де Ситтера и все возможные их комбинации друг с другом являются частными случаями общего решения.

Ищем решение уравнений ОТО с лямбда членом $\Lambda = \frac{4}{3}\lambda^2$ и Фридмановской идеальной пылью в правой части:

$$G_{\mu\nu} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} T^{\text{Dust}}_{\mu\nu} \tag{1}$$

Метрика сферически симметрична и зависит всего от одной функции $V(t, r)$:

$$ds^2 = dt^2 - (dr - V dt)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2 \tag{2}$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна:

$$G_{tt} = -\frac{V}{r^2}\left(V^3 - 2rV'(1 - V^2) + V(2r\dot{V} - 1)\right), \tag{3}$$

$$G_{tr} = \frac{2V}{r^2}\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right), \tag{4}$$

$$G_{rr} = -\frac{2}{r^2}\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right), \tag{5}$$

$$G_{\theta\theta} = -r\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right)', \tag{6}$$

$$G_{\varphi\varphi} = -r\sin(\theta)^2\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right)'. \tag{7}$$

Точкой и штрихом обозначено дифференцирование по t и по r соответственно.

Поскольку идеальная пыль не имеет Лагранжиана её учёт осуществляется следующим образом. Сначала решаются "tr", "rr", "$\theta\theta$" и "$\varphi\varphi$" уравнения. Для них правая часть равна нулю. То что получилось для левой части "tt" уравнения объявляется плотностью энергии идеальной пыли.

*s.yu.gubanov@inbox.ru

Легко видеть, что "tr", "rr", "$\theta\theta$", "$\varphi\varphi$" уравнения сводятся всего к одному уравнению:

$$\dot{V} + \frac{1}{2r}\left(rV^2\right)' = \frac{2}{3}\lambda^2 r \tag{8}$$

Общее решение для $V(t,r)$ можно записать в неявном виде:

$$F\left(\sqrt{r}\left(\cosh(\lambda t)V - \frac{2\lambda r}{3}\sinh(\lambda t)\right), \sqrt{r}\left(\sinh(\lambda t)V - \frac{2\lambda r}{3}\cosh(\lambda t)\right)\right) = 0. \tag{9}$$

Здесь $F(\alpha,\beta)$ – произвольная функция двух переменных. Случаю $\lambda = 0$ соответствует [1]

$$F\left(\sqrt{r}V, \sqrt{r}\left(Vt - \frac{2r}{3}\right)\right) = 0. \tag{10}$$

Далее рассмотрены частные случаи.

Решение Шварцшильда. Выбор $F(\alpha,\beta) = \alpha \pm \sqrt{2kM}$ и устремление лямбда члена к нулю в результате даёт

$$V = \pm\sqrt{\frac{2kM}{r}}, \tag{11}$$

что соответствует решению Шварцшильда в системе координат Пэнлевэ. Если не устремлять лямбда член к нулю, то получается

$$V = \frac{2}{3}\lambda r\tanh(\lambda t) \pm \sqrt{\frac{2k\tilde{M}(t)}{r}}, \quad \tilde{M}(t) = \frac{M}{\cosh^2(\lambda t)}. \tag{12}$$

При этом

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \pm\frac{2\lambda}{3r\cosh^2(\lambda t)}\left(\mp 2\lambda r + 3\sinh(\lambda t)\sqrt{\frac{2kM}{r}}\right). \tag{13}$$

Решение Фридмана. Выбор $F(\alpha,\beta) = \beta$ и устремление лямбда члена к нулю в результате даёт

$$V = \frac{2r}{3t}, \tag{14}$$

что соответствует решению Фридмана. Сделав преобразование координат его можно привести к каноническому виду:

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{t}{T}\right)^{4/3}\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin(\theta)^2 d\varphi^2\right). \tag{15}$$

Если не устремлять лямбда член к нулю, то получается

$$V = \frac{2}{3}\lambda r\coth(\lambda t). \tag{16}$$

При этом

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \frac{4\lambda^2}{3\sinh^2(\lambda t)}. \tag{17}$$

Решение де Ситтера. Выбор $F(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$ даёт

$$V=\frac{2}{3}r\lambda, \tag{18}$$

что соответствует решению де Ситтера. Сделав преобразования координат его можно привести к одному из канонических видов:

$$ds^2=dt^2-\exp\left(\frac{4}{3}\lambda t\right)\left(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin(\theta)^2d\varphi^2\right). \tag{19}$$

$$ds^2=\left(1-\frac{4}{9}\lambda^2r^2\right)dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{4}{9}\lambda^2r^2}-r^2d\theta^2-r^2\sin(\theta)^2d\varphi^2. \tag{20}$$

При этом

$$G_{tt}-\frac{4}{3}\lambda^2g_{tt}=0. \tag{21}$$

Комбинация решений Шварцшильда и де Ситтера. Выбор $F(\alpha,\beta)=\alpha^2-\beta^2-2kM$ даёт

$$V=\pm\sqrt{\frac{2kM}{r}+\frac{4}{9}\lambda^2r^2}, \tag{22}$$

что соответствует чёрной/белой дыре в пространстве де Ситтера. Сделав преобразование координат его можно привести к каноническому виду:

$$ds^2=\left(1-\frac{2kM}{r}-\frac{4}{9}\lambda^2r^2\right)dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{2kM}{r}-\frac{4}{9}\lambda^2r^2}-r^2d\theta^2-r^2\sin(\theta)^2d\varphi^2. \tag{23}$$

При этом

$$G_{tt}-\frac{4}{3}\lambda^2g_{tt}=0. \tag{24}$$

Комбинация решений Шварцшильда и Фридмана. Выбор $F(\alpha,\beta)=\beta\mp\lambda\sqrt{2kQ}$ и устремление лямбда члена к нулю даёт [2]

$$V=\frac{2r}{3t}\pm\sqrt{\frac{2kM(t)}{r}},\quad M(t)=\frac{Q}{t^2}, \tag{25}$$

что при $r\ll t$ переходит в решение Шварцшильда с переменной массой, а при $r\gg t$ переходит в решение Фридмана. Если не устремлять лямда член к нулю, то получается

$$V=\frac{2}{3}\lambda r\coth(\lambda t)\pm\sqrt{\frac{2kM(t)}{r}},\quad M(t)=\frac{Q\lambda^2}{\sinh^2(\lambda t)}. \tag{26}$$

При этом

$$G_{tt}-\frac{4}{3}\lambda^2g_{tt}=\frac{4\lambda^2}{3\sinh^2(\lambda t)}\left(1\pm\frac{3}{2}\cosh(\lambda t)\sqrt{\frac{2kQ}{r^3}}\right). \tag{27}$$

Комбинация решений Фридмана и де Ситтера. Выбор $F(\alpha,\beta)=A\alpha+B\beta$ даёт [3]

$$V=\frac{2\lambda r}{3}\frac{A\sinh(\lambda t)+B\cosh(\lambda t)}{A\cosh(\lambda t)+B\sinh(\lambda t)}. \tag{28}$$

При $A=B$ это решение переходит в решение де Ситтера, а при $A=0$ и равном нулю лямбда члене оно переходит в решение Фридмана. При этом

$$G_{tt}-\frac{4}{3}\lambda^2g_{tt}=\frac{4\lambda^2\left(B^2-A^2\right)}{3\left(A\cosh(\lambda t)+B\sinh(\lambda t)\right)^2}. \tag{29}$$

Комбинация решений Шварцшильда, Фридмана и де Ситтера. Выбор $F(\alpha, \beta) = A\alpha + B\beta \mp \sqrt{2kM}$ даёт

$$V = \frac{1}{A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t)} \left(\pm\sqrt{\frac{2kM}{r}} + \frac{2}{3}\lambda r \left(A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)\right) \right). \tag{30}$$

При этом

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \frac{4\lambda^2 \left((B^2 - A^2) \pm \frac{3}{2\lambda}\sqrt{\frac{2kM}{r^3}} \left(A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)\right) \right)}{3(A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t))^2}. \tag{31}$$

Список литературы

[1] Губанов С. Ю., Самогравитирующая пыль, запись в личном блоге от 28 января 2008: http://sergeygubanov.narod.ru/SelfgravityDust.pdf

[2] Бурланков Д. Е., Анализ общей теории относительности: Монография. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. - 239 с. ISBN 978-5-91326-172-4

[3] Губанов С. Ю., Плоская космологическая модель с лямбда членом в рамках ТГВ, запись в личном блоге от 17 апреля 2008: http://sergeygubanov.narod.ru/LambdaGTT.pdf