

Движение в окрестности чёрной дыры

Губанов Сергей Юрьевич*

27 ноября 2006 г.

Аннотация

Доказано, что в пространстве-времени чёрной дыры собственные времена двух частиц летящих по инерции прошедшие с момента их первой встречи до момента второй встречи (если таковая случится) в общем случае будут разными. Обсуждаются физические последствия этого факта.

Уравнения движения. Вывод уравнений движения позаимствован из монографии [1]. Метрика пространства-времени чёрной дыры в системе отсчёта Пенлевэ:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr - V dt)^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2, \quad (1)$$

$$V = -c \sqrt{\frac{a}{r}}, \quad (2)$$

где a - Шварцшильдовский гравитационный радиус. Уравнение Гамильтона-Якоби в этой системе отсчёта:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (3)$$

Канонические импульсы:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial r} = p_r, \quad \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = p_\vartheta, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi. \quad (4)$$

Функция связи:

$$F = \frac{mc^2}{2} \left[1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)} \right) \right) \right] - \left(\frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}} \right)^2 = 0. \quad (5)$$

Уравнения движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial E} = \frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}}, \\ \frac{dE}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \\ \frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_r} = \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{p_r}{m} - \frac{E}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}}, \\ \frac{dp_r}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)}}{m r^3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}} \right) \frac{c p_r}{r}, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m r^2}, \\ \frac{dp_\vartheta}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = \frac{p_\varphi^2 \cos(\vartheta)}{m r^2 \sin^3(\vartheta)}, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2(\vartheta)}, \\ \frac{dp_\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Выразив канонические импульсы через скорости и подставив полученные выражения в функцию связи (5) получим:

$$F = \frac{mc^2}{2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} - V \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{c^2} r^2 \sin^2(\vartheta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \right] = 0. \quad (7)$$

*gubanov@itp.ac.ru

Откуда,

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dr - V dt)^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2 \equiv ds^2. \quad (8)$$

Следовательно параметр τ - собственное время движущейся частицы. Решим уравнение связи (5) относительно энергии, оно имеет два решения:

$$H_{\pm} = mc^2 \left[-\frac{p_r}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_{\vartheta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2(\vartheta)} \right) \right)} \right]. \quad (9)$$

Легко проверить истинность следующего соотношения со скобками Пуассона:

$$\left\{ H_{\pm}, p_{\vartheta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2(\vartheta)} \right\} = 0. \quad (10)$$

Согласно уравнениям движения (6) энергия сохраняется, следовательно функция из (10) тоже интеграл движения:

$$L^2 = p_{\vartheta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2(\vartheta)} = const. \quad (11)$$

Решая систему уравнений (6) относительно ϑ и p_{ϑ} получаем: $\vartheta = \pi/2$ и $p_{\vartheta} = 0$, следовательно $p_{\varphi} = L$. Выпишем оставшиеся уравнения:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}}, \quad (12)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{p_r}{m} - \frac{E}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}}, \quad (13)$$

$$\frac{dp_r}{d\tau} = \frac{L^2}{m r^3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc} \sqrt{\frac{a}{r}} \right) \frac{c p_r}{r}, \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m r^2}. \quad (15)$$

Решим уравнение связи (5) относительно радиального канонического импульса p_r , оно имеет два решения:

$$p_{r\pm} = \frac{mc}{1 - \frac{a}{r}} \left[\frac{E}{mc^2} \sqrt{\frac{a}{r}} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{L^2}{m^2 c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{a}{r} \right)} \right]. \quad (16)$$

Подстановка (16) в (13) даёт:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{L^2}{m^2 c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{a}{r} \right)}. \quad (17)$$

Откуда становится ясен физический смысл двух решений для $p_{r\pm}$. Одно из них описывает движение "вверх": $dr/d\tau > 0$; другое "вниз": $dr/d\tau < 0$. Уравнение (17) определено всюду где

$$\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \geq \left(1 + \frac{L^2}{m^2 c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{a}{r} \right), \quad (18)$$

в том числе и под гравитационным радиусом $r < a$. Забавно, что уравнение (17) одинаково описывая как движение вверх так и вниз, само по себе, не запрещает частицам вылетать из области $r < a$ в область $r > a$, т. е. покидать чёрную дыру.

Движение по окружности. При движении по окружности радиуса $r = R$ имеем $dr/d\tau = 0$ и $dp_r/d\tau = 0$, решая эти уравнения можно выразить орбитальный момент L и энергию частицы E как функции от R :

$$L_R = m c R \sqrt{\frac{a}{R} \frac{1}{\sqrt{2 - 3\frac{a}{R}}}}, \quad (19)$$

$$E_R = m c^2 \sqrt{\left(1 + \frac{L_R^2}{m^2 c^2 R^2} \right) \left(1 - \frac{a}{R} \right)}. \quad (20)$$

Период обращения по собственному времени:

$$\tilde{T}_R = 2\pi \frac{m R^2}{L_R}, \quad (21)$$

по координатному времени Пэнлевэ:

$$T_R = \frac{E_R}{m c^2} \frac{\tilde{T}_R}{1 - \frac{a}{R}}. \quad (22)$$

В частности, при $R \rightarrow \frac{3}{2}a$ период обращения по собственному времени стремится к нулю, а тангенциальная скорость в собственной системе отсчёта, соответственно, стремится к бесконечности. В системе отсчёта Пэнлевэ период обращения стремится к $3\sqrt{3}\pi a/c$, соответственно, тангенциальная скорость к $1/\sqrt{3} c \approx 0.57735 c$. Учитывая радиальную скорость (2) относительно "падающей" на центр координатной сетки инерциальной системы отсчёта, полная скорость движения относительно ИСО стремится к $\sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2/3})^2} c = c$, что и интуитивно ожидалось.

Чисто радиальное движение. Положив $L = 0$ получим из (17) уравнение для чисто радиального движения:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c \sqrt{\frac{a}{r} + \left(\frac{E}{m c^2}\right)^2 - 1}. \quad (23)$$

Решим следующую задачу. Допустим частицу находящуюся на "высоте" $r = r_1$ подбросили вертикально "вверх". Она долетела до некоторой "высоты" $r = r_2$, а затем упала обратно. Поскольку в точке $r = r_2$ она на мгновение остановилась, следовательно $dr/d\tau$ обратилась в ноль, отсюда находим её энергию: $E = m c^2 \sqrt{1 - a/r_2}$. Подставляем это значение энергии в (23), получаем:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c \sqrt{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}. \quad (24)$$

Как на движение из точки r_1 в точку r_2 так и на обратное движение частица тратит одинаковое количество собственного времени:

$$\begin{aligned} \tau_{12} = \tau_{21} &= \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}} \\ &= \frac{1}{c} \frac{r_1 r_2}{a} \left[\sqrt{\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}} + \frac{a}{r_1} \sqrt{\frac{r_2}{a}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r_2}{r_1} - 1}} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Две частицы. Пусть теперь есть две частицы. Одна частица совершает круговое движение на высоте r_1 , а вторую частицу мы подбрасываем вверх с этой же высоты в тот момент времени когда они находятся в одной и той же точке пространства. Совершив полный оборот за собственное время \tilde{T}_{r_1} определяемое формулой (21) первая частица вернётся в исходную точку. Подберём высоту подъёма r_2 второй частицы так, чтобы на подъём и обратный спуск она потратила ровно то же самое количество собственного времени \tilde{T}_{r_1} , что и первая. Спрашивается, встретятся ли эти частицы в одной и той же точке или разминутся? Комбинируя (24) с (12) получаем уравнение чисто радиального движения по координатному времени Пэнлевэ:

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left[\sqrt{\frac{a}{r}} \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{a}{r_2}}{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}} \right]^{-1}. \quad (26)$$

Знаки \pm в (26) как и в (24) отвечают за движение "вверх" и "вниз". Уравнение (26) в отличие от (24) не разрешает частицам вылетать из под горизонта чёрной дыры. Время в пути между точками r_1 и r_2 :

$$t_{12} = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{\frac{a}{r}} + \sqrt{\frac{1 - \frac{a}{r_2}}{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}}}{1 - \frac{a}{r}} dr \quad (27)$$

$$t_{21} = \frac{1}{c} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sqrt{\frac{a}{r}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{a}{r_2}}{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}}}{1 - \frac{a}{r}} dr \quad (28)$$

Нас интересует их сумма:

$$\begin{aligned}
t_{12} + t_{21} &= \frac{2}{c} \sqrt{1 - \frac{a}{r_2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(1 - \frac{a}{r}\right) \sqrt{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}} \\
&= \frac{2}{c} \sqrt{1 - \frac{a}{r_2}} \left[\frac{r_1 r_2}{a} \sqrt{\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}} + (r_2 + 2a) \sqrt{\frac{r_2}{a}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) \right) \right] \\
&+ \frac{4a}{c} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}}{1 - \frac{a}{r_2}}} \right).
\end{aligned} \tag{29}$$

Следующая система уравнений относительно неизвестных r_1 и r_2

$$\begin{cases} \tau_{r_1 r_2} + \tau_{r_2 r_1} = \tilde{T}_{r_1}, \\ t_{r_1 r_2} + t_{r_2 r_1} = T_{r_1}, \end{cases} \tag{30}$$

вещественных решений не имеет. Если две частицы вновь встретятся их собственные времена прошедшие с момента первой встречи окажутся разными.

Обсуждение результата. В теоретической физике закон движения частиц выводится из принципа наименьшего действия. Истинной траекторией движения считается та, действие на которой минимально. В то же самое время для вывода уравнений движения приравнивают к нулю одну лишь только первую вариацию действия. Для частиц действие пропорционально их собственному времени:

$$S = -m c^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau, \tag{31}$$

и, как было показано выше, существуют различные дважды пересекающиеся траектории первая вариация действия вдоль которых равна нулю, а действие, т. е. собственное время на них, разное. Есть более одного пути из одной точки в другую, на одном из них действие меньше чем на втором, но они оба одинаково истинные. Как к этому относиться, как к парадоксу? Стоит ли в таких случаях занулять вторую, третью и т. д. вариации действия? В квантовой механике в квазиклассическом приближении действие играет роль фазы и, казалось бы, вдоль двух одинаково истинных дважды пересекающихся траекторий набег фазы должен быть одинаковым, но это оказывается не так...

Список литературы

- [1] Д. Е. Бурланков, *Динамика пространства*, монография, Нижний Новгород, ННГУ, 2005, 179 стр.