# Инерциальная система отсчёта в пространстве-времени Керра

Губанов Сергей Юрьевич*

11 декабря 2006 г.

**Аннотация**

Рассмотрен переход в глобальную инерциальную систему отсчёта в пространстве-времени Керра.

**Инерциальная система отсчёта в искривлённом пространстве.** По определению, в инерциальной системе отсчёта (ИСО) должен выполняться первый закон Ньютона. Будучи обобщённым [1] на случай искривлённого пространства он гласит, что тело покоящееся относительно координатной сетки ИСО остаётся в состоянии покоя неограниченно долго. Однако, сама координатная сетка, т. е. пространственная метрика, может зависеть от времени. Поэтому, максимально общий вид метрики в ИСО таков:

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}(x,t)dx^i dx^j, \tag{1}$$

здесь $i, j = 1, 2, 3$. В физической литературе [2], ИСО часто называют синхронной системой отсчёта. Координатное время $t$ ИСО является собственным временем всех лабораторий покоящихся относительно её координатной сетки, оно синхронизировано. В связи с этим, его можно называть *глобальным временем* не забывая, конечно, что любая движущаяся относительно ИСО лаборатория при этом обладает своим (локальным) собственным временем. Неинерциальная система отсчёта (НСО) движется относительно ИСО [1], т. е. в каждой точке пространства определена скорость $dx^i/dt = V^i$ движения координатной сетки данной НСО относительно координатной сетки ИСО (эта скорость чисто координатная поэтому может быть больше скорости света), так задаётся векторное поле $V^i(x,t)$. Метрика в НСО имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\left(dx^i - V^i dt\right)\left(dx^j - V^j dt\right). \tag{2}$$

Аналогичное трёхмерное представление четырёхмерной метрики пространства-времени исследовалось в работах АДМ [3]. Общая ковариантность уравнений разрешает производить преобразования координат смешивающие пространственные координаты и время. Например, она разрешает заменить время $t$ на формальную координату $x^0 = f(x,t)$. Геометрически, между временем $t$ и формальной координатой $x^0$ разницы нет, но физически она есть: со скоростью хода времени $t$ идут хронометры всех лабораторий неподвижных относительно ИСО, а со скоростью хода "времени" $x^0$ не идёт ни один хронометр в мире. Так, например, разность времён $t_A$ и $t_B$ имеет физический смысл интервала времени между событиями $A$ и $B$ произошедшими в одной и той же точке пространства, а разность формальных координат $x^0_A$ и $x^0_B$ физическим смыслом не обладает.

**Алгоритм перехода из НСО в ИСО.** Благодаря общей ковариантности уравнений метрика НСО, в общем случае имеет вид:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu, \tag{3}$$

здесь $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Переход от (3) к (1) осуществляется, очевидно, в два этапа.

**Первый этап.** Переход от (3) к (2). Формальным отличием метрики (3) от (2) является соотношение $g^{tt} = 1$ выполняемое в (2), в то время как в (3) компонента $g^{00}$ - произвольная функция. Следовательно, для перехода от (3) к (2) достаточно выбрать в качестве новой времениподобной координаты функцию $t(x^0, x^1, x^2, x^3)$ такую, что $g^{tt} = 1$. По правилу преобразования компонент тензора имеем:

$$g^{tt} = g^{\mu\nu}\frac{\partial t}{\partial x^\mu}\frac{\partial t}{\partial x^\nu} = 1. \tag{4}$$

Это уравнение Гамильтона-Якоби для частиц с единичной массой [1], следовательно физический смысл функции $t(x)$ - собственное время свободно падающих частиц. Глобальное решение уравнения (4), если оно существует, и есть глобальное время в (2) и в (1). Если глобального решения уравнения Гамильтона-Якоби не существует, то такое четырёхмерное многообразие, по видимому, не может являться физически реализуемым пространством-временем.

*gubanov@itp.ac.ru

**Второй этап.** Переход от (2) к (1). Чтобы занулить скорости $V^i$ в (2) нужно перейти в систему отсчёта, координатная сетка которой движется относительно координатной сетки (2) со скоростью $dx^i/dt = V^i$. То есть надо осуществить преобразование одних только пространственных координат зависящее от времени $x^i \to x^i(\bar{x}, t)$, где $\bar{x}^i$ - координаты в ИСО. Для этого необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i(\bar{x},t)}{dt} &= V^i(x(\bar{x},t),t), \\ x^i(\bar{x},0) &= \bar{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

В статическом случае, вместо того чтобы решать эти уравнения можно сначала выбрать такую систему пространственных координат $(x^1, x^2, x^3) \to (X, Y, Z)$, в которой в каждой точке пространства векторное поле $V^i$ будет иметь только одну отличную от нуля компоненту, например $V^Z$. Если функции $X(x^1, x^2, x^3)$ и $Y(x^1, x^2, x^3)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} X(x^1,x^2,x^3) &= 0, \\ V^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y(x^1,x^2,x^3) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

то компоненты $V^X$ и $V^Y$, очевидно, будут равны нулю. Линии координаты $Z$ в каждой точке пространства параллельны линиям векторного поля $\vec{V}$, а линии координат $X$ и $Y$ - ортогональны. В координатах $(X, Y, Z)$ система из трёх уравнений уравнений (5) превращается всего в одно уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dz(\bar{z},t)}{dt} &= V^Z(z(\bar{z},t)), \\ z(\bar{z},0) &= \bar{z}. \end{aligned} \tag{7}$$

**ИСО в пространстве-времени Керра.** Метрика пространства-времени Керра в системе отсчёта Бойера - Линдквиста имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{a}{r}\frac{1}{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}, \\ g_{03} &= b\frac{a}{r}\frac{\sin^2(\vartheta)}{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}, \\ g_{11} &= -\frac{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}{1-\frac{a}{r}+\frac{b^2}{r^2}}, \\ g_{22} &= -r^2\left(1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)\right), \\ g_{33} &= -r^2\sin^2(\vartheta)\left(1+\frac{b^2}{r^2}\left(1+\frac{a}{r}\frac{\sin^2(\vartheta)}{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}\right)\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где $a$ - гравитационный радиус Шварцшильда, $b$ - константа интегрирования Керра. При $b = 0$ получается метрика Шварцшильда. Выполняя первый этап, переходим к глобальному времени $g^{tt} = 1$ делая следующее преобразование [1]:

$$dt \to dt - \sqrt{\frac{a}{r}}\frac{\sqrt{1+\frac{b^2}{r^2}}}{1-\frac{a}{r}+\frac{b^2}{r^2}}\, dr. \tag{9}$$

Вторым этапом, нужно избавиться от скоростей $V^r$ и $V^\varphi$. От скорости $V^\varphi$ можно избавиться простым статическим (не зависящим от времени) переопределением начала отсчёта угла:

$$d\varphi \to d\varphi - \frac{b}{r^2}\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{r^2}}}\frac{1}{1-\frac{a}{r}+\frac{b^2}{r^2}}\, dr. \tag{10}$$

Результат преобразований (9) и (10) над метрикой (8) запишем в терминах трёхмерных поля скоростей $V^i(x,t)$ и трёхмерной метрики $\gamma_{ij}(x,t)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{rr} &= \frac{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}{1+\frac{b^2}{r^2}}, \\
\gamma_{\vartheta\vartheta} &= r^2\left(1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)\right), \\
\gamma_{\varphi\varphi} &= r^2\sin^2(\vartheta)\left(1+\frac{b^2}{r^2}\left(1+\frac{a}{r}\frac{\sin^2(\vartheta)}{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}\right)\right), \\
\gamma_{r\varphi} &= b\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{\sin^2(\vartheta)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{r^2}}}, \\
V^r &= -\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{\sqrt{1+\frac{b^2}{r^2}}}{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Метрика пространства-времени определяемая (11) при $b=0$ переходит в метрику Пэнлевэ [5]:

$$ds^2 = dt^2 - (dr - V^r dt)^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2\sin^2(\vartheta)d\varphi^2. \tag{12}$$

Далее, выполняя второй этап преобразования, устраняем скорость $V^r$ переходя от координаты $r$ к новой координате $\bar{r}$ по формуле $r = R(\bar{r},\vartheta,t)$, где функция $R(\bar{r},\vartheta,t)$ такая, что:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(\bar{r},\vartheta,t)}{\partial t} &= V^r, \\
R(\bar{r},\vartheta,0) &= \bar{r};
\end{aligned} \tag{13}$$

она неявно задаётся следующим соотношением:

$$-\int\limits_{\bar{r}}^{R(\bar{r},\vartheta,t)} \frac{1+\frac{b^2}{r^2}\cos^2(\vartheta)}{\sqrt{\frac{a}{r}}\sqrt{1+\frac{b^2}{r^2}}}\, dr = t. \tag{14}$$

Поскольку функция $R(\bar{r},\vartheta,t)$ задана соотношением (14) неявно, то и метрику ИСО, к сожалению, записать в явном виде не представляется возможным, зато теперь точно известно, что она существует.

**Обсуждение результата.** Сдвинув начало отсчёта угла (10) мы устранили вращение $V^\varphi = 0$, добившись чисто радиального падения. В этом, с одной стороны, нет ничего удивительного поскольку в статическом случае переопределением пространственных координат можно занулить любые две компоненты векторного поля $V^i$. С другой стороны, в данном случае мы не можем точно утверждать какой же из углов $\varphi$ является истинным: сдвинутый или исходный. А вдруг истинным углом $\varphi$ является именно сдвинутый? Ведь оба они одинаково хороши. То есть в зависимости от того, что называть углом $\varphi$ вращение $V^\varphi$ падающей инерциальной системы либо есть либо нет. Не понятно, вращается ли пространство Керра на самом деле.

# Список литературы


[1] Д. Е. Бурланков, *Динамика пространства*, монография, Нижний Новгород, ННГУ, 2005, 179 стр.

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория Поля.* М.: Наука, 1988.

[3] Arnovitt R., Deser S., and Misner C.W. Phys. Rev. 116, 1322 (1959).

[4] С. Чандрасекар Математическая теория чёрных дыр. М.: Мир, 1986 [Chandrasekhar S., The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford Univ. Press, 1983].

[5] Painleve P. C.R. Acad. Sci. (Paris). 173, 677 (1921).