Попытка четырёхмерной инвариантной формулировки ТГВ

Губанов Сергей Юрьевич*

28 ноября 2006 г.

Аннотация

ТГВ рассматривает *пространство* и *время* как два разных физических явления. В данной работе делается попытка инвариантной формулировки ТГВ как теории в формальном четырёхмерном пространстве-времени. Обсуждается разница между ТГВ и ОТО.

Теория глобального времени (ТГВ) была разработана Дмитрием Евгеньевичем Бурланковым [1, 2, 3, 4]. Целью данной работы является доказательство следующего результата. Пусть M_4 будет такое четырёхмерное пространство-время, в котором существует глобальное уникальное решение уравнения Гамильтона-Якоби:

$$g^{ij}\frac{\partial t}{\partial x^i}\frac{\partial t}{\partial x^j}=1. \tag{1}$$

(Такое решение $t(x^0,x^1,x^2,x^3)$ называется *глобальным временем* в M_4, отсюда и название теории - ТГВ.) Мы утверждаем, что действие ТГВ предложенное Бурланковым может быть переписано как:

$$S_{GT}=-\frac{1}{2}\int\limits_{t(x^0,x^1,x^2,x^3)=t_1}^{t(x^0,x^1,x^2,x^3)=t_2} R_4\sqrt{-g}\,d_4x, \tag{2}$$

где R_4 - скалярная кривизна M_4. Посредством S_{GR} обозначим действие Гильберта в Общей теории относительности:

$$S_{GR}=-\frac{1}{2}\int\limits_{M_4} R_4\sqrt{-g}\,d_4x. \tag{3}$$

Откуда видна формальная разница между S_{GT} и S_{GR}:

- нетривиальные пределы интегрирования (гиперобъём ограниченный двумя гиперповерхностями $t=const$ в ТГВ против полного гиперобъёма M_4 в ОТО);
- специфическая топология M_4 (должно существовать глобальное уникальное решение уравнения Гамильтона-Якоби (1)) в ТГВ против абсолютно произвольной топологии многообразия M_4 в ОТО. Фактически топология M_4 в ТГВ есть просто прямое произведение $M_4=\mathbb{R}^1\times M_3$ физического времени на физическое пространство.

Лемма 1. Предположим, что функция $t(x^0,x^1,x^2,x^3)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби (1). Мы утверждаем, что:

$$(\star dt)\wedge dt=\sqrt{-g}\,d_4x. \tag{4}$$

В самом деле, это следует из определения:

$$dt=\frac{\partial t}{\partial x^i}dx^i \tag{5}$$

и

$$\star dt=\frac{\partial t}{\partial x^i}\left(\star dx^i\right)=\frac{\partial t}{\partial x^i}\frac{1}{3!}\sqrt{-g}\,g^{in}\varepsilon_{njkl}\,dx^j\wedge dx^k\wedge dx^l. \tag{6}$$

Комбинируя (5) и (6), получаем

$$(\star dt)\wedge dt=\left(g^{ij}\frac{\partial t}{\partial x^i}\frac{\partial t}{\partial x^j}\right)\sqrt{-g}\,d_4x=\sqrt{-g}\,d_4x. \tag{7}$$

Используя **Лемму 1**, можно получить следующее соотношение:

$$S_{GT}=-\frac{1}{2}\int\limits_{t(x^0,x^1,x^2,x^3)=t_1}^{t(x^0,x^1,x^2,x^3)=t_2} R_4\,(\star dt)\wedge dt. \tag{8}$$

*gubanov@itp.ac.ru

Далее предположим, что $M_4 = \mathbb{R}^1 \times M_3$, тогда производя преобразование четырёхмерных координат, а именно заменяя $x^0 \to t$, получаем:

$$S_{GT} = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt, \tag{9}$$

$$L = -\frac{1}{2} \int\limits_{M_3} R_4 \left(\star dt\right) = -\frac{1}{2} \int\limits_{M_3} R_4 \sqrt{\gamma}\, d_3 x, \tag{10}$$

где γ_{ij} - метрика физического пространства M_3. Теперь мы докажем, что лагранжиан (10) это и есть лагранжиан ТГВ.

Лемма 2. Предположим $M_4 = \mathbb{R}^1 \times M_3$ тогда четырёхмерную метрику можно представить в виде:

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} \left(dx^i - V^i dt\right) \left(dx^j - V^j dt\right), \tag{11}$$

где $i, j = 1, 2, 3$ (это есть представление Арновитта, Дезера и Мизнера такое, в котором функция хода времени равна единице: $g^{00} = 1$, $g^{0i} = V^i$; причём $\sqrt{-g} = \sqrt{\gamma}$ [5]). Следующее равенство доказывается прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} R_4 \quad = \quad & \frac{1}{2} R_3 - \frac{3}{8} \gamma^{ij} \gamma^{kl} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_{jl}}{\partial t} + \frac{1}{8} \gamma^{ij} \gamma^{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} && (12) \\
& + \frac{1}{2} \gamma^{ij} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V^i}{\partial t \partial x^i} + \gamma^{ij} V^k \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial t \partial x^k} \\
& + V^i \frac{\partial^2 V^j}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{4} \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial V^i}{\partial x^i} \frac{\partial V^j}{\partial x^j} \\
& + \frac{1}{2} \gamma^{jk} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \frac{\partial V^k}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial V^k}{\partial t} \\
& + \frac{1}{2} \gamma^{ij} V^k V^l \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{1}{2} \gamma^{jl} V^k \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial V^i}{\partial x^l} \\
& + \frac{1}{4} \gamma_{ij} \gamma^{kl} \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \frac{\partial V^j}{\partial x^l} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} V^k \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial V^l}{\partial x^l} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} V^k \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^l} \frac{\partial V^l}{\partial x^k} \\
& + \frac{1}{4} \gamma^{ij} \gamma^{kl} V^m \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^m} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} - \frac{3}{4} \gamma^{ij} \gamma^{kl} V^m \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^m} \frac{\partial \gamma_{jl}}{\partial t} \\
& - \frac{3}{8} \gamma^{ij} \gamma^{kl} V^m V^n \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^m} \frac{\partial \gamma_{jl}}{\partial x^n} + \frac{1}{8} \gamma^{ij} \gamma^{kl} V^m V^n \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^m} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^n} \\
= \quad & \frac{1}{8} \left(\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{ij} \gamma^{kl}\right) D_t \gamma_{ij} D_t \gamma_{kl} + \frac{1}{2} R_3 && (13) \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} D_t \left(\sqrt{\gamma}\, \gamma^{ij} D_t \gamma_{ij}\right),
\end{aligned}$$

где R_3 есть скалярная кривизна физического пространства M_3, и D_t - инвариантная производная по глобальному времени t (см. **Приложение**).

Из **Леммы 2**, можно получить следующее соотношение:

$$L = -\frac{1}{2} \int\limits_{M_3} R_4 \sqrt{\gamma}\, d_3 x = \frac{1}{2} \int\limits_{M_3} \left(\frac{1}{4} \left(\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{ij} \gamma^{kl}\right) D_t \gamma_{ij} D_t \gamma_{kl} + R_3 \right) \sqrt{\gamma}\, d_3 x. \tag{14}$$

Откуда и становится очевидным, что рассматриваемый лагранжиан и есть лагранжиан ТГВ. На этом завершается доказательство главного результата этой статьи.

Приложение

Метрика в системе отсчёта глобального времени. Предположим, что функция $t(x^0, x^1, x^2, x^3)$ есть глобальное уникальное решение уравнения Гамильтона-Якоби (1). Осуществляя координатное преобразование $\tilde{x}^0 \to t$ получаем:

$$g^{00} = \frac{\partial t}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial t}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{g}^{ij} = 1. \tag{15}$$

Поэтому, по определению, метрика в системе отсчёта глобального времени может быть выбрана такой, что $g^{00} = 1$ всегда и везде.

Метрика в неинерциальной системе отсчёта. Находясь в неинерциальной системе отсчёта (но в глобальном времени $g^{00} = 1$) для метрики имеем: $(i, j = 1, 2, 3)$

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} \left(dx^i - V^i dt\right) \left(dx^j - V^j dt\right). \tag{16}$$

Здесь трёхмерное векторное поле $V^i \equiv g^{0i}$ есть относительная скорость движения (в каждой точке) координатной сетки неинерциальной системы отсчёта относительно координатной сетки инерциальной системы отсчёта.

Метрика в инерциальной системе отсчёта. В инерциальной системе отсчёта $V^i = 0$. Поэтому,

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j. \tag{17}$$

Преобразования между инерциальной и неинерциальной системами отсчёта. Обозначим посредством $\bar{x}^i$ координаты в инерциальной системе отсчёта. Осуществляя координатное преобразование:

$$\bar{x}^i \to x^i(\bar{x}, t), \tag{18}$$

мы, тем самым, переходим в неинерциальную систему отсчёта. В самом деле, принимая во внимание, что $g^{00} = 1$ и

$$g^{0i} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{g}^{0j} + \frac{\partial x^i}{\partial t}, \tag{19}$$

получаем

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{V}^j + \frac{\partial x^i}{\partial t}. \tag{20}$$

По определению, в инерциальной системе отсчёта имеем $\bar{V}^i = 0$. Следовательно, в неинерциальной:

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}. \tag{21}$$

Дифференцирование по глобальному времени t. В инерциальной системе отсчёта мы имеем тождество: $D_t \equiv \partial/\partial t$. Теперь вычислим производную от скалярной функции $F(x, t)$ по глобальному времени t в неинерциальной системе отсчёта с координатной сеткой $x^i(\bar{x}, t)$:

$$D_t F(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + V^i \frac{\partial F}{\partial x^i}. \tag{22}$$

Аналогично, для произвольного трёхмерного тензорного поля Q^{ij}_{kl} получаем:

$$D_t Q^{ij}_{kl} = \frac{\partial}{\partial t} Q^{ij}_{kl} + V^n \nabla_n Q^{ij}_{kl} + Q^{ij}_{nl} \nabla_k V^n + Q^{ij}_{kn} \nabla_l V^n - Q^{nj}_{kl} \nabla_n V^i - Q^{in}_{kl} \nabla_n V^j, \tag{23}$$

где ∇_i есть обычная трёхмерная ковариантная производная по координате x^i по отношению к трёхмерной метрике γ_{ij}:

$$\nabla_i \gamma_{jk} \equiv \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ij} \gamma_{lk} - \Gamma^l_{ik} \gamma_{jl} = 0. \tag{24}$$

В частности,

$$D_t \gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \gamma_{ik} \nabla_j V^k + \gamma_{kj} \nabla_i V^k, \tag{25}$$

$$D_t \left(\sqrt{\gamma}\, F\right) = \frac{\partial \left(\sqrt{\gamma}\, F\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\sqrt{\gamma}\, V^i\, F\right)}{\partial x^i}. \tag{26}$$

Список литературы

[1] Д. Е. Бурланков, *Динамика пространства*, монография, Нижний Новгород, ННГУ, 2005, 179 стр.

[2] D. E. Burlankov. Space Dynamics in Global Time as an Effective Alternative to General Relativity. arXiv: gr-qc/0509050, 2005.

[3] D. E. Burlankov. Cosmic Vortexes in Global Time Theory. arXiv: gr-qc/0406112, 2004.

[4] D. E. Burlankov. The Quantum Big Bang in Global Time Theory. arXiv: gr-qc/0406110, 2004.

[5] R. Arnovitt, S. Deser, and C. W. Misner. Phys. Rev. 116, 1322, 1959.