Ковариантный коммутатор операторов рождения и уничтожения

Губанов Сергей Юрьевич*

12 марта 2014 г.

1 Массовая гиперповерхность

Операторы рождения и уничтожения квантов свободного скалярного массивного поля живут на трёхмерной массовой гиперповерхности выделенной в четырёхмерном импульсном пространстве. Метрика четырёхмерного импульсного пространства псевдоевклидова:

$$d\mu^2 = dp_0^2 - dp_x^2 - dp_y^2 - dp_z^2. \tag{1}$$

Массовая гиперповерхность определяется уравнением:

$$p_0 = \pm\sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \tag{2}$$

Часто можно слышать будто массовая гиперповерхность – трёхмерный гиперболоид. Это не совсем так. Массовая гиперповерхность была бы трёхмерным гиперболоидом если бы выделялась в четырёхмерном евклидовом пространстве. Однако импульсное пространство псевдоевклидово, поэтому массовая гиперповерхность – трёхмерная псевдосфера радиуса m (однородное изотропное пространство постоянной отрицательной кривизны $R = -6/m^2$).

*s.yu.gubanov@inbox.ru

2 Системы координат на массовой гиперповерхности

Выделю три системы координат на массовой гиперповерхности.

1. Традиционная для КТП система координат p_x, p_y, p_z:

$$h_{ij}(p)\,dp^i dp^j = dp_x^2 + dp_y^2 + dp_z^2 - \frac{(p_x dp_x + p_y dp_y + p_z dp_z)^2}{m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \tag{3}$$

Метрический тензор в этой системе координат не диагонален. Мера интегрирования:

$$\sqrt{h(p)}\,d_3p = \frac{m}{\sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}\,dp_x\,dp_y\,dp_z. \tag{4}$$

2. Система координат p, θ, φ с явно выделенной симметрией 2-сферы:

$$p_x = p\sin(\theta)\cos(\varphi), \quad p_y = p\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad p_z = p\cos(\theta), \tag{5}$$

$$h_{ij}(p)\,dp^i dp^j = \frac{m^2}{m^2+p^2}dp^2 + p^2 d\theta^2 + p^2\sin(\theta)^2 d\varphi^2, \tag{6}$$

$$\sqrt{h(p)}\,d_3p = \frac{m\,p^2\sin(\theta)}{\sqrt{m^2+p^2}}\,dp\,d\theta\,d\varphi. \tag{7}$$

3. Система угловых координат χ, θ, φ с явно выделенной симметрией 3-псевдосферы:

$$p = m\sinh(\chi), \tag{8}$$

$$h_{ij}(p)\,dp^i dp^j = m^2\left(d\chi^2 + \sinh(\chi)^2\left(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2\right)\right), \tag{9}$$

$$\sqrt{h(p)}\,d_3p = m^3\sinh(\chi)^2\sin(\theta)\,d\chi\,d\theta\,d\varphi. \tag{10}$$

3 Инвариантное интегрирование по массовой гиперповерхности

Если на массовой гиперповерхности задана функция $f(p)$, то интеграл от неё по массовой гиперповерхности есть

$$\int f(p)\sqrt{h(p)}\,d_3p. \tag{11}$$

Такой интеграл не зависит от используемой системы координат.

4 Нековариантная формулировка

Оператор рождения $a^\dagger(p)$ и оператор уничтожения $a(p)$ квантов поля есть некие операторнозначные функции заданные на рассматриваемой массовой гиперповерхности (на трёхмерной псевдосфере). Часто в книгах по КТП можно видеть следующее коммутационное соотношение:

$$\left[a(p), a^\dagger(p')\right] = \delta_3(p - p'). \tag{12}$$

С такой формулой связана следующая проблема. Выше, в качестве примера, я показал три системы координат на псевдосфере. Думаете в какой системе координат записан этот коммутатор? Беда этой формулы в том, что трёхмерная дельта функция не является трёхмерным скаляром, поскольку при заменах координат ведёт себя как тензорная плотность $\sqrt{h(p)}$. По определению трёхмерной дельта функции имеем:

$$\int \delta_3(p)\,d_3p = 1. \tag{13}$$

Но инвариантная мера интегрирования по массовой гиперповерхности есть $\sqrt{h(p)}\,d_3p$, поэтому скалярной функцией является $\delta_3(p)$ делённая на $\sqrt{h(p)}$:

$$\int \left(\frac{\delta_3(p)}{\sqrt{h(p)}}\right)\sqrt{h(p)}\,d_3p = 1. \tag{14}$$

5 Ковариантная формулировка

Ковариантное коммутационное соотношение между $a(p)$ и $a^\dagger(p)$ такое:

$$\left[a(p), a^\dagger(p')\right] = \frac{\delta_3(p-p')}{\sqrt{h(p)}}. \tag{15}$$

При этом, независимо от используемой системы координат, выполняются следующие равенства:

$$\int \left[a(p), a^\dagger(p')\right] \sqrt{h(p)}\, d_3p = 1, \qquad \int \left[a(p), a^\dagger(p')\right] \sqrt{h(p')}\, d_3p' = 1. \tag{16}$$

Собственно, можно было бы постулировать эти равенства, а затем из них получить ковариантную формулу для коммутатора.

А как же поступают авторы книг по КТП использующие нековариантый коммутатор? А они нековариантность привносят во всё остальное, так чтобы лишь всё вместе было ковариантно. Формально в этом ошибки нет. Нам же важно чтобы конечный ответ не зависел от системы координат на массовой поверхности, а промежуточные шаги не так уж и интересны. Тем не менее, для более глубокого понимания было бы полезно промежуточные шаги тоже представлять в ковариантном виде. Тем более, что это не составляет труда. Ковариантное многочастичное состояние:

$$|p_1, \ldots, p_n\rangle = a^\dagger(p_1) \ldots a^\dagger(p_n)\, |0\rangle, \tag{17}$$

$$\langle p_1, \ldots, p_n| = \langle 0|\, a(p_1) \ldots a(p_n). \tag{18}$$

Инвариантная нормировка:

$$\int \langle p|p'\rangle \sqrt{h(p)}\, d_3p = 1, \qquad \int \langle p|p'\rangle \sqrt{h(p')}\, d_3p' = 1. \tag{19}$$

Поэтому:

$$\langle p|p'\rangle = \frac{\delta_3(p-p')}{\sqrt{h(p)}}. \tag{20}$$

В этих обозначениях:

$$\left[a(p), a^\dagger(p')\right] = \langle p|p'\rangle. \tag{21}$$

Гамильтониан:

$$H = \int \varepsilon(p)\, a^\dagger(p)\, a(p) \sqrt{h(p)}\, d_3p, \tag{22}$$

$$H|p_1, \ldots, p_n\rangle = \left(\varepsilon(p_1) + \ldots + \varepsilon(p_n)\right) |p_1, \ldots, p_n\rangle. \tag{23}$$