ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

© 2016 С. Ю. Губанов*

Акционерное общество "ИНТЕЛ А/О" Нижний Новгород ул. Тургенева 30

(в прошлом: Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН)

Поступила в редакцию 26 октября 2016 г.

Найдено общее решение системы уравнений ОТО для изотропной Вселенной с плоским пространственным сечением и интегрально синхронизируемым временем с учётом идеальной пыли и космологической постоянной. Решения Шварцшильда, Фридмана, Эйнштейна – де Ситтера, а так же все их объединения друг с другом являются частными случаями найденного общего решения. Найден способ порождения бесконечного количества семейств решений Толменовского типа. Выписаны обыкновенные дифференциальные уравнения для пылевого облака во Вселенной заполненной излучением и нерелятивистским газом. Найдено точное решение для пылевого облака во Вселенной заполненной излучением и соответствующее ему семейство решений Толменовского типа. Обсуждается проблема в ОТО с отрицательной плотностью энергии.

Ключевые слова: гравитация, космология, точные решения, ОТО

PACS codes: 04.20.Jb, 04.70.Bw

---

* Электронный адрес <s.yu.gubanov@inbox.ru>

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим модель *изотропной* Вселенной с *плоским* пространственным сечением и интегрально *синхронизируемым* временем. В общем случае метрика *такой* модели Вселенной зависит всего от одной функции $V(t,r)$ и представима в следующем виде (см. раздел Пространственно-временная структура)

$$ds^2 = dt^2 - (dr - V(t,r)\,dt)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)\,d\varphi^2. \tag{1}$$

К метрике вида (1) с помощью соответствующих преобразований координат могут быть приведены следующие известные метрики:

1) метрика Шварцшильда (Schwarzschild, 1916);

2) метрика Рейснера – Нордстрема (Reissner, 1916), (Nordström, 1918);

3) метрика Эйнштейна – де Ситтера (de Sitter, 1917);

4) метрика Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера с плоским пространственным сечением (А. А. Фридман, 1922, 1924).

5) метрика Толмена в случае плоского пространственного сечения (Tolman, 1934).

Объединённая метрика Шварцшильда, Рейснера – Нордстрема и Эйнштейна – де Ситтера

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2kM}{r} + \frac{kQ^2}{r^2} - \frac{4}{9}\lambda^2 r^2\right) d\tilde{t}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2kM}{r} + \frac{kQ^2}{r^2} - \frac{4}{9}\lambda^2 r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 \tag{2}$$

приводится к виду (1)

$$ds^2 = dt^2 - \left(dr \pm \sqrt{\frac{2kM}{r} - \frac{kQ^2}{r^2} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2}\,dt\right)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 \tag{3}$$

при помощи замены Пэнлеве – Гуллстранда (Painleve, 1921), (Gullstrand, 1922)

$$d\tilde{t} = dt \pm \frac{\sqrt{\frac{2kM}{r} - \frac{kQ^2}{r^2} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2}}{1 - \frac{2kM}{r} + \frac{kQ^2}{r^2} - \frac{4}{9}\lambda^2 r^2} dr. \tag{4}$$

Метрика Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера с плоским пространственным сечением

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2\sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right) \tag{5}$$

приводится к виду (1)

$$ds^2 = dt^2 - \left(dr - r\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\,dt\right)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 \tag{6}$$

при помощи замены радиусной координаты $\tilde{r}$

$$\tilde{r}(t,r) = \frac{r}{a(t)}. \tag{7}$$

Метрика Толмена

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \frac{d\xi^2}{1+f(\xi)} - r^2(t,\xi)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \pm\sqrt{f(\xi) + \frac{2kM(\xi)}{r}}, \tag{9}$$

при формальном использовании функции $r(t,\xi)$ в качестве радиусной координаты принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{1+f}\left(dr \mp \sqrt{f + \frac{2kM}{r}}dt\right)^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2\right), \tag{10}$$

При $f = 0$ принимает вид (1). Случай $f \neq 0$ рассмотрен далее отдельно.

Так как несколько известных и, казалось бы, не связанных друг с другом метрик сводятся к виду (1), представляет интерес для метрики (1), зависящей всего от одной функции $V(t,r)$, найти *общее решение* системы уравнений ОТО с учётом идеальной пыли и космологической постоянной:

$$G_{\mu\nu} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{\mu\nu} = 8\pi k\, T_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Общее решение $V(t,r)$ должно в частных случаях давать решение Шварцшильда, Фридмана, Эйнштейна – де Ситтера, а так же все возможные их объединения друг с другом.

ТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна для метрики (1) имеют следующий вид:

$$G_{tt} = -\frac{V}{r^2}\left(V^3 - 2rV'(1-V^2) + V(2r\dot{V} - 1)\right), \tag{12}$$

$$G_{tr} = \frac{2V}{r^2}\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right), \tag{13}$$

$$G_{rr} = -\frac{2}{r^2}\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right), \tag{14}$$

$$G_{\theta\theta} = -r\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right)', \tag{15}$$

$$G_{\varphi\varphi} = -r\sin^2(\theta)\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right)'. \tag{16}$$

Точкой и штрихом обозначено дифференцирование по t и по r соответственно. Использовано определение для тензора Эйнштейна принятое в (Ландау, Лифшиц, 1967).

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ–ИМПУЛЬСА ИДЕАЛЬНОЙ ПЫЛИ

Тензор энергии импульса идеальной пыли имеет вид (Ландау, Лифшиц, 1967):

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu. \tag{17}$$

Четырёхскорость u^μ идеальной пыли удовлетворяет следующим уравнениям

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1, \quad u^\mu\left(\nabla_\mu u^\nu\right) = 0. \tag{18}$$

Решая уравнения (18) в метрике (1) для сопутствующей идеальной пыли получаем:

$$u^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial r}, \quad u_\mu dx^\mu = dt. \tag{19}$$

Поэтому для метрики (1) тензор энергии–импульса имеет всего одну отличную от нуля компоненту

$$T_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \rho\, dt^2. \tag{20}$$

Из равенства нулю дивергенции тензора энергии импульса следует уравнение неразрывности плотности потока пыли:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \to \quad \nabla_\mu\left(\rho u^\mu\right) = 0 \quad \to \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho\, V\right) = 0. \tag{21}$$

Плотность массы пыли ρ в (17) является *скаляром*, в то время как *плотность энергии* пыли является *компонентой тензора* T_{tt}. В данном случае они численно совпадают $T_{tt} = \rho$ в силу (19).

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ЕЁ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Благодаря тождествам Гильберта (Hilbert, 1915) уравнение (21) уже содержится в системе уравнений (11) с правой частью (20). Поэтому решение системы (11) ищется следующим образом. Сначала решаются tr, rr, $\theta\theta$, $\varphi\varphi$ – уравнения, то есть те уравнения которые имеют нулевую правую часть. Легко видеть, что tr, rr, $\theta\theta$, $\varphi\varphi$ – уравнения сводятся всего к одному уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2 - \frac{4}{9}\lambda^2 r^3\right) = 0. \tag{22}$$

При этом

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = -\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{23}$$

Далее, найденное решение уравнения (22) подставляется в единственное оставшееся нерешённым tt–уравнение ОТО:

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = 8\pi k\rho \tag{24}$$

Получившаяся левая часть tt–уравнения ОТО используется в качестве определения для плотности ρ сопутствующей идеальной пыли:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi k\, r}\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{25}$$

Общее решение уравнения (22) записывается в неявном виде:

$$F\left(\sqrt{r}\left(\cosh(\lambda t)V - \frac{2\lambda r}{3}\sinh(\lambda t)\right), \sqrt{r}\left(\sinh(\lambda t)V - \frac{2\lambda r}{3}\cosh(\lambda t)\right)\right) = 0. \tag{26}$$

В случае $\lambda = 0$:

$$\tilde{F}\left(\sqrt{r}\,V, \sqrt{r}\left(Vt - \frac{2r}{3}\right)\right) = 0. \tag{27}$$

Здесь $F(\alpha, \beta)$ – произвольная вещественная дифференцируемая функция двух переменных.

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Пример 1. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha \pm \sqrt{2kM}$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{2}{3}\lambda r \tanh(\lambda t) \pm \frac{1}{\cosh(\lambda t)}\sqrt{\frac{2kM}{r}}. \tag{28}$$

$$G^{\pm}_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g^{\pm}_{tt} = \frac{2\lambda}{3r\cosh^2(\lambda t)}\left(-2\lambda r \pm 3\sinh(\lambda t)\sqrt{\frac{2kM}{r}}\right). \tag{29}$$

При $\lambda = 0$ получаем:

$$V = \pm\sqrt{\frac{2kM}{r}}. \tag{30}$$

$$G_{tt} = 0. \tag{31}$$

Это решение Шварцшильда записанное в системе координат Пэнлеве–Гуллстранда. (Painleve, 1921), (Gullstrand, 1922).

Пример 2. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \beta$ даёт:

$$V = \frac{2}{3}\lambda r \coth(\lambda t), \tag{32}$$

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \frac{4\lambda^2}{3\sinh^2(\lambda t)}. \tag{33}$$

При $\lambda = 0$ получаем:

$$V = \frac{2r}{3t}, \tag{34}$$

$$G_{tt} = \frac{4}{3t^2}. \tag{35}$$

Это решение Фридмана с плоским пространственным сечением.

Пример 3. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ даёт:

$$V = \frac{2}{3}r\lambda, \tag{36}$$

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = 0. \tag{37}$$

Это решение Эйнштейна – де Ситтера.

Пример 4. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 - \beta^2 - 2kM$ даёт:

$$V^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{2kM}{r} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2}, \tag{38}$$

$$G^{\pm}_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g^{\pm}_{tt} = 0. \tag{39}$$

Это минимальное объединение решений Шварцшильда и Эйнштейна – де Ситтера.

Пример 5. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \beta \mp \lambda R^{3/2}$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{2}{3}\lambda r \coth(\lambda t) \pm \frac{\lambda R}{\sinh(\lambda t)}\sqrt{\frac{R}{r}}, \tag{40}$$

$$G_{tt}^{\pm} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt}^{\pm} = \frac{4\lambda^2}{3\sinh^2(\lambda t)}\left(1 \pm \frac{3}{2}\cosh(\lambda t)\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}\right). \tag{41}$$

При $\lambda = 0$ получаем решение Бурланкова (Бурланков, 2011):

$$V^{\pm} = \frac{2r}{3t} \pm \frac{R}{t}\sqrt{\frac{R}{r}}, \tag{42}$$

$$G_{tt}^{\pm} = \frac{4}{3t^2}\left(1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}\right). \tag{43}$$

Это минимальный вариант объединения решения Шварцшильда и решения Фридмана с плоским пространственным сечением.

Пример 6. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = A\alpha + B\beta$ даёт:

$$V = \frac{2\lambda r}{3}\frac{A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)}{A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t)}, \tag{44}$$

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \frac{4\lambda^2\left(B^2 - A^2\right)}{3\left(A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t)\right)^2}. \tag{45}$$

Это минимальный вариант объединения решения Эйнштейна – де Ситтера и решения Фридмана с плоским пространственным сечением. При $B = 0$ отсутствует космологическая сингулярность.

Пример 7. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = A\alpha + B\beta \mp \sqrt{2kM}$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{1}{A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t)}\left(\pm\sqrt{\frac{2kM}{r}} + \frac{2}{3}\lambda r\left(A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)\right)\right), \tag{46}$$

$$G_{tt}^{\pm} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt}^{\pm} = \frac{4\lambda^2\left((B^2 - A^2) \pm \frac{3}{2\lambda r}\sqrt{\frac{2kM}{r}}\left(A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)\right)\right)}{3(A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t))^2}. \tag{47}$$

Это минимальный вариант объединения решений Шварцшильда, Эйнштейна – де Ситтера и решения Фридмана с плоским пространственным сечением.

Пример 8. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha\beta - R^2$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{2}{3}\lambda r\coth(2\lambda t) \pm \frac{\sqrt{4\lambda^2 r^4 + 18R^2 r\sinh^2(2\lambda t)}}{3r\sinh(2\lambda t)} \tag{48}$$

Выражение для плотности энергии слишком громоздко что бы привести его здесь.

При $\lambda = 0$ получаем:

$$V^{\pm} = \frac{r}{3t}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{9R^2 t}{r^3}}\right), \tag{49}$$

$$G_{tt}^{\pm} = \frac{2}{3t^2}\left(1 \pm \frac{1+\frac{9R^2t}{2r^3}}{\sqrt{1+\frac{9R^2t}{r^3}}}\right). \tag{50}$$

При $R = 0$ и выборе знака плюс получается решение Фридмана.

Пример 9. Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \frac{A}{\lambda}\beta$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{\lambda r \sinh(2\lambda t)}{3\cosh^2(\lambda t)} - \frac{A\tanh(\lambda t)}{2\lambda\sqrt{r}\cosh(\lambda t)} \pm \frac{\sqrt{8Ar^{5/2}\cosh(\lambda t) + 3A^2 r\lambda^{-2}\sinh^2(\lambda t)}}{2\sqrt{3}r\cosh^2(\lambda t)} \tag{51}$$

Выражение для плотности энергии слишком громоздко что бы привести его здесь.

При $\lambda = 0$ получаем:

$$V^{\pm} = -\frac{At}{2\sqrt{r}} \pm \frac{\sqrt{8Ar^{5/2} + 3A^2rt^2}}{2\sqrt{3}r}, \tag{52}$$

$$G_{tt}^{\pm} = \frac{A}{r^{3/2}} \mp \frac{A^2 t}{r\sqrt{(8/3)Ar^{5/2} + A^2rt^2}}. \tag{53}$$

Это решение взятое со знаком минус описывает сжимающуюся Вселенную с чёрной дырой, гравитационный радиус которой увеличивается со временем (см. следующий раздел).

ГРАВИТАЦИОННЫЙ РАДИУС ПЫЛЕВОГО ОБЛАКА И ВИДИМЫЙ ГОРИЗОНТ ВСЕЛЕННОЙ

Гравитационный радиус пылевого облака $r_g(t)$, а так же радиус видимого горизонта Вселенной зависят от времени и для метрики (1) определяются уравнением

$$1 - V(t, r_g(t))^2 = 0. \tag{54}$$

Для решения (42) взятого со знаком плюс (Бурланков, 2011) уравнение (54) имеет два вещественных неотрицательных корня $r_g^{(1)}(t)$ и $r_g^{(2)}(t)$ со следующим асимптотическим поведением при $t \to \infty$:

$$r_g^{(1)}(t) \approx \frac{R^3}{t^2} + \frac{4R^6}{3t^5} + \frac{28R^9}{9t^8} + O(t^{-11}) \tag{55}$$

$$r_g^{(2)}(t) \approx \frac{3t}{2} - \sqrt{\frac{3R^3}{2t}} - \frac{R^3}{2t^2} - \sqrt{\frac{25R^9}{96t^7}} + O(t^{-5}) \tag{56}$$

Корень $r_g^{(1)}(t)$ – гравитационный радиус рассеивающегося пылевого облака, асимптотически уменьшется как t^{-2} (центральное ядро облака теряет массу). Корень $r_g^{(2)}(t)$ – видимый горизонт расширяющейся Вселенной (асимптотическое поведение как в решении Фридмана).

Для решения (49) взятого со знаком плюс уравнение (54) тоже имеет два вещественных неотрицательных корня:

$$r_g^{(1)}(t) = \frac{3t}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8R^2}{3t^2}}\right) \approx \frac{R^2}{t} + \frac{2R^4}{3t^3} + O(t^{-5}); \qquad (57)$$

$$r_g^{(2)}(t) = \frac{3t}{4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8R^2}{3t^2}}\right) \approx \frac{3t}{2} - \frac{R^2}{t} - \frac{2R^4}{3t^3} + O(t^{-5}). \qquad (58)$$

Решения (42) и (49) имея одинаковую – фридмановскую – асимптотику по расширяющемуся видимому горизонту, имеют разную асимптотику по уменьшающемуся гравитационному радиусу: R^3/t^2 против R^2/t. Пылевое облако (42) рассеивается быстрее чем (49).

Теперь рассмотрим асимптотику $t \to +\infty$ решения (52) взятого со знаком минус при $A \neq 0$:

$$V \approx -\frac{At}{\sqrt{r}} - \frac{2r}{3t} + O(t^{-3}). \qquad (59)$$

Первый член отвечает за массивное ядро коллапсирующего пылевого облака, переобозначим его следующим образом

$$-\frac{At}{\sqrt{r}} = -\sqrt{\frac{2kM(t)}{r}}, \quad M(t) = \frac{A^2t^2}{2k}. \qquad (60)$$

Гравитационный радиус этого коллапсирующего пылевого облака асимптотически растёт со временем как t^2. Отрицательный линейный по r член отвечает за сжатие Вселенной.

ПОРОЖДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО КОЛИЧЕСТВА СЕМЕЙСТВ РЕШЕНИЙ ТОЛМЕНОВСКОГО ТИПА

Обобщение метрики (1) на случай неплоского пространственного сечения имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{(dr - V(t,r)\,dt)^2}{1 + f(t,r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right). \qquad (61)$$

Для метрики (61) система уравнений (11) принимает следующий вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2 - \frac{4}{9}\lambda^2 r^3\right) - \frac{f}{2r} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + V\frac{\partial f}{\partial r} = 0. \qquad (62)$$

При этом

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = -\frac{1}{r}\left(2\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r}\right). \qquad (63)$$

Рассмотрим статическое вакуумное решение:

$$V(r) = \pm\sqrt{f + \frac{2kM}{r} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2}, \quad f = const, \quad M = const, \quad \rho = 0. \tag{64}$$

Осуществим переход в *синхронную систему* координат $(t, r) \to (t, \xi)$:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = V \quad \to \quad dr - V dt = \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi. \tag{65}$$

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \frac{d\xi^2}{1+f} - r^2(t,\xi)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right). \tag{66}$$

Зависимость r от ξ произвольная, требуется лишь $(\partial r/\partial \xi) \neq 0$. Если теперь вместо константных f и M взять произвольные функции $f(\xi)$ и $M(\xi)$, то получится решение Толмена (Tolman, 1934) с ненулевой плотностью энергии:

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \frac{2k\frac{\partial M}{\partial \xi}}{r^2 \frac{\partial r}{\partial \xi}}. \tag{67}$$

Аналогичную программу действий можно осуществить с любым решением $V_{[F]}(t, r)$ системы (62). Решения системы (62) можно использовать для порождения новых решений *Толменовского типа*: переход в синхронную систему координат $(t, r) \to (t, \xi)$ и последующая замена набора констант интегрирования $(C_1,\, C_2, \ldots)$ от которых зависит $V_{[F]}(t, r)$

$$V_{[F]}(t, r) = V_{[C_1,\, C_2, \ldots]}(t, r) \tag{68}$$

на произвольные функции от ξ

$$V_{[C_1,\, C_2, \ldots]}(t, r) \to V_{[C_1(\xi),\, C_2(\xi), \ldots]}(t, r(t, \xi)) \tag{69}$$

даёт новое семейство решений. Например, возьмём решение (42), перейдём в синхронную систему координат согласно (86):

$$\frac{\partial r}{\partial t}^{\pm} = \frac{2r}{3t} \pm \frac{R}{t}\sqrt{\frac{R}{r}}. \tag{70}$$

Если теперь константу R заменить на произвольную функцию $R(\xi)$, то получим новое семейство решений Толменовского типа со следующей плотностью энергии

$$G_{tt} = \frac{4}{3t^2}\left(1 \pm \frac{3R}{2r}\sqrt{\frac{R}{r}}\right)\left(1 \pm \frac{3R\frac{\partial R}{\partial \xi}}{2r\frac{\partial r}{\partial \xi}\sqrt{\frac{R}{r}}}\right) \tag{71}$$

В качестве ещё одного примера возьмём решение (49), перейдём в синхронную систему координат согласно (86):

$$\frac{\partial r}{\partial t}^{\pm} = \frac{r}{3t}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{9R^2 t}{r^3}}\right). \tag{72}$$

Если теперь константу R заменить на произвольную функцию $R(\xi)$, то получим новое семейство решений толменовского типа со следующей плотностью энергии

$$G_{tt} = \frac{1}{3t^2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9tR^2}{r^3}}}\right)\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{9tR^2}{r^3}+\frac{6tR\frac{\partial R}{\partial \xi}}{r^2\frac{\partial r}{\partial \xi}}}\right). \tag{73}$$

Решения системы (62) являются генераторами (производящими функциями) новых решений Толменовского типа.

ПЫЛЕВОЕ ОБЛАКО ВО ВСЕЛЕННОЙ ЗАПОЛНЕННОЙ ИЗЛУЧЕНИЕМ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМ ГАЗОМ

В этом разделе полагаем $\lambda = 0$. Рассмотрим задачу о сферически симметричном пылевом облаке во Вселенной заполненной ультрарелятивистским газом (излучением) и нерелятивистским газом. Для учёта давления газа $p(t,r)$ нужно в правую часть системы (11) подставить

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu + (\varepsilon + p)\, v_\mu v_\nu - p\, g_{\mu\nu}. \tag{74}$$

Здесь ρ, u_μ – плотность и четырёхскорость идеальной пыли, ε, p, v_μ – плотность, давление и четырёхскорость газа (и излучения).

Пусть $a(t)$ – Фридмановский масштабный фактор из (5), согласно (7) ему соответствует радиальное поле скоростей $V(t,r) = r\,\dot a(t)/a(t)$. Будем искать решение системы (11) в следующем виде:

$$V(t,r) = r\,\frac{\dot a(t)}{a(t)} \pm \sqrt{\frac{2kM(t)}{r}}, \tag{75}$$

$$p(t) = \frac{\Omega_r}{a^4(t)} + \frac{\Omega_b}{a^3(t)}. \tag{76}$$

Это далеко не единственное решение, а лишь самое простейшее. Система (11) сводится к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\ddot a(t) = -\frac{\dot a^2(t)}{2a(t)} - 4\pi k\left(\frac{\Omega_b}{a^2(t)} + \frac{\Omega_r}{a^3(t)}\right). \tag{77}$$

$$\dot M(t) = -3M(t)\frac{\dot a(t)}{a(t)}. \tag{78}$$

При этом, плотность и четырёхскорость газа:

$$\varepsilon(t) = \frac{3\dot a^2(t)}{8\pi k a^2(t)}, \quad v_\mu dx^\mu = dt. \tag{79}$$

Плотность и четырёхскорость пылевого облака:

$$\rho(t,r) = \pm\frac{3\dot{a}(t)}{8\pi k\, r\, a(t)}\sqrt{\frac{2kM(t)}{r}}, \quad u_\mu dx^\mu = dt. \tag{80}$$

Вселенная излучения. Рассмотрим случай когда Вселенную заполняет одно лишь излучение. Уравнения системы (11) для метрики (1):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2\right) = -4\pi k\, r\, p. \tag{81}$$

$$v_\mu dx^\mu = dt, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \varepsilon = 3p, \quad \rho = 0. \tag{82}$$

Решение:

$$V(t,r) = \frac{r}{2t}, \quad p(t) = \frac{1}{32\pi k t^2}, \quad \varepsilon = 3p, \quad \rho = 0. \tag{83}$$

Согласно (6) это соответствует Фридмановскому масштабному фактору $a(t) = A\sqrt{t}$.

Пылевое облако во Вселенной заполненной излучением. Теперь найдём простейшее частное решение с тем же давлением $p(t)$:

$$p(t) = \frac{1}{32\pi k t^2}, \quad \varepsilon = 3p, \tag{84}$$

но с ненулевой плотностью пыли ρ. Решение удовлетворяющее этому критерию:

$$V(t,r) = \frac{r}{2t} \pm \sqrt{\frac{2kM(t)}{r}}, \quad M(t) = \frac{Q^2}{2k\, t^{3/2}}, \quad \rho = \frac{3Q}{16\pi k\, t^{7/4} r^{3/2}}. \tag{85}$$

Гравитационный радиус такого облака асимптотически уменьшается как $t^{-3/2}$, облако рассеивается.

Решение (85) *порождает* следующее семейство решений Толменовского типа. Осуществим переход в *синхронную систему* координат $(t,r) \to (t,\xi)$:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{r(t,\xi)}{2t} + \frac{Q}{t^{3/4}\sqrt{r(t,\xi)}}, \quad dr - \frac{\partial r}{\partial t}dt = \frac{\partial r}{\partial \xi}d\xi. \tag{86}$$

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 d\xi^2 - r^2(t,\xi)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right). \tag{87}$$

Если теперь константу Q заменить на произвольную функцию $Q(\xi)$, то получится новое семейство решений Толменовского типа со следующей плотностью энергии

$$G_{tt} = \frac{2r^{3/2}\frac{\partial Q}{\partial \xi} + Q\left(4t^{1/4}\frac{\partial Q}{\partial \xi} + 3\sqrt{r}\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)}{16\pi k\, t^{7/4} r^2 \frac{\partial r}{\partial \xi}} \tag{88}$$

Проблема возможной отрицательной плотности энергии рассматривается далее в разделе ”Уравнения гравитационного поля”.

ПРОСТРАНСТВЕННО–ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА

Метрика вида (1) не только является ключом к объединению различных решений (Шварцшильда, де Ситтера, Фридмана и др.), но и позволяет, например, наиболее просто записать уравнения гидродинамической задачи, а затем проследить за судьбой падающей материи под горизонтом событий чёрной дыры (Рубан, 2014). Метрика вида (1) необходима для осуществления корректного предельного перехода из ОТО к задачам классической физики. Например, в классической механике Лагранжиан свободной частицы движущейся в поле скоростей V^i имеет следующий вид

$$L = \frac{1}{2} m \gamma_{ij} \left(\frac{dx^i}{dt} - V^i \right) \left(\frac{dx^j}{dt} - V^j \right). \tag{89}$$

Он в точности соответствует нерелятивистскому движению в гравитационном поле вида (1) если его записать в чуть более общем виде (Бурланков, 2006):

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} \left(dx^i - V^i dt \right) \left(dx^j - V^j dt \right). \tag{90}$$

Метрика Бурланкова (90) является частным случаем метрики Арновитта – Дезера – Мизнера (Arnovitt, Deser, Misner, 1959). Локальная пространственно–временная структура четырёхмерного пространства событий задаётся *тетрадой*. А именно, тремя ковекторными полями (триадой): $e^{(1)} = e^{(1)}_\mu dx^\mu$, $e^{(2)} = e^{(2)}_\mu dx^\mu$, $e^{(3)} = e^{(3)}_\mu dx^\mu$ задающими базис в *кокасательном расслоении* трёхмерного *пространственного распределения*; и одним ковекторным полем $e^{(0)} = e^{(0)}_\mu dx^\mu$ – *дифференциальной формой* времени (Сарданашвили, 2011). Время *трансверсально* трёхмерному *пространственному распределению*. Взятые вместе $e^{(0)}$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$ задают базис в *линейном реперном расслоении* с группой Лоренца, и псевдоримановой метрикой пространства событий имеющей следующий вид

$$g_{\mu\nu} = e^{(0)}_\mu e^{(0)}_\nu - e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(3)}_\mu e^{(3)}_\nu. \tag{91}$$

$$g^{\mu\nu} e^{(0)}_\mu e^{(0)}_\nu = +1, \quad g^{\mu\nu} e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu = -1, \quad g^{\mu\nu} e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu = -1, \quad g^{\mu\nu} e^{(3)}_\mu e^{(3)}_\nu = -1. \tag{92}$$

Метрике Бурланкова (90) соответствует случай *безвихревой* дифференциальной формы времени

$$\oint e^{(0)} = 0, \qquad de^{(0)} = 0, \qquad e^{(0)} = \frac{\partial t}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{93}$$

При этом *интегральные многообразия* локального трёхмерного *пространственного распределения* образуют *слоение* пространства событий, *листами* которого являются гиперповерхности $t(x) = const$. Физически же условие (93) разрешает интегральную (не локальную) синхронизацию времени: интеграл от $e^{(0)}$ зависит только от начальной и конечной точки, но не от пути интегрирования. Из (92) и (93) получается уравнение Гамильтона – Якоби на функцию $t(x)$ – интегрально синхронизируемого времени используемого в метрике Бурланкова:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial t}{\partial x^\mu}\frac{\partial t}{\partial x^\nu} = 1. \tag{94}$$

При предельном переходе от ОТО к нерелятивистской физике функция $t(x)$, удовлетворяющая уравнению Гамильтона – Якоби, переходит в время Ньютона в классической механике, время в уравнении Шрёдингера в квантовой механике, и время в уравнении Эйлера в гидродинамике. Вот почему гидродинамические задачи (Рубан, 2014) в координатах Пэнлеве–Гуллстранда формулируются гораздо проще.

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим проблему отрицательной плотности энергии возникающую в рамках ОТО. Согласно общему решению (26) любой произвольно заданной функции $F(\alpha, \beta)$ соответствует частное решение $V_{[F]}(t, r)$. Среди всевозможных частных решений существуют такие $V_{[F^\star]}(t, r)$, которые делают левую часть tt–уравнения ОТО отрицательной. Но в правой части tt–уравнения ОТО стоит положительно определённая плотность энергии обычной материи, таким образом решения $V_{[F^\star]}(t, r)$ в ОТО запрещены (либо требуют экзотическую материю с отрицательной энергией). В то же самое время, с геометрической точки зрения не существует принципиальной разницы между решениями с положительной или отрицательной компонентой G_{tt} тензора Эйнштейна-Гильберта. Ограничение $G_{tt} \geq 0$ с чисто геометрической точки зрения является искусственным. Возникает интерес *изменить* уравнения гравитационного поля так, что бы допускался любой знак G_{tt}.

Найдём экстремум действия Гильберта

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi k}G_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d_4x \tag{95}$$

не на произвольных мировых многообразиях, а только на тех которые допускают безвихревую дифференциальную форму времени. Согласно (93) для метрики таких многообразий допускается следующее представление

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial t}{\partial x^\mu}\frac{\partial t}{\partial x^\nu} - e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(3)}_\mu e^{(3)}_\nu. \tag{96}$$

Оставляя дифференциальную форму времени безвихревой, варьируем действие Гильберта по тринадцати полям: $t(x)$, $e^{(1)}_\mu(x)$, $e^{(2)}_\mu(x)$, $e^{(3)}_\mu(x)$. Получаем следующую систему уравнений гравитационного поля:

$$\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi k}G^{\mu\nu}\right) e^{(i)}_\nu = 0, \tag{97}$$

$$\nabla_\mu \left(\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi k}G^{\mu\nu}\right)\frac{\partial t}{\partial x^\nu}\right) = 0. \tag{98}$$

Уравнение (98) представляет собой аналог тождеств Гильберта ОТО записанных для метрики (96). Из-за локальной $SO(3)$ симметрии триады $e^{(1)}_\mu$, $e^{(2)}_\mu$, $e^{(3)}_\mu$ из двенадцати уравнений (97) линейно независимыми являются лишь девять. Ровно столько же уравнений имеет теория гравитации Бурланкова (Бурланков, 2006). Фактически уравнения (97), (98) являются *общековариантной* формулировкой теории Бурланкова с отличным от нуля Гамильтонианом

$$H = \frac{\partial t}{\partial x^\mu}\frac{\partial t}{\partial x^\nu}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi k}G^{\mu\nu}\right). \tag{99}$$

Решения $V_{[F^\star]}(t,r)$ принадлежат теории гравитации с системой уравнений (97), (98) и Гамильтонианом (99). То что в рамках ОТО может быть объяснено лишь экзотической материей с отрицательной плотностью энергии, в теории Бурланкова является плотностью энергии самого гравитационного поля (Гамильтониан не равен нулю) и не требует существования экзотической материи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор выражает благодарность Виктору Константиновичу Дубровичу и Дмитрию Евгеньевичу Бурланкову за побуждение к работе в этой теме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hilbert D. (1915). Gottingen Nachr. **3** 395
2. Schwarzschild K. (1915). Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1. 189 – 196
3. Reissner, H. (1916). *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie.* Annalen der Physik (in German). 50: 106–120.
4. de Sitter W. (1917). Proc. Kon. Ned. Acad. Wet., 20: 229–243
5. Nordström, G. (1918). *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory.* Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam. 26: 1201–1208.
6. Painleve P. (1921). C. R. Acad. Sci. (Paris) **173**, 677-680
7. Gullstrand A. (1922). Arkiv. Mat. Astron. Fys. **16**, 1
8. Friedman A. A. // Z. Phys. 1922. V. 10. P. 377; 1924. V. 21. P. 306;
Фридман А. А. *Мир как пространство и время.* М.: Наука, 1965.
9. Richard C. Tolman *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* Vol. 20, No. 3 (Mar. 15, 1934), pp. 169-176
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля.* М.: Наука, 1967
11. Arnovitt R., Deser S., Misner C. W. Phys. Rev., 1959, V. **116**, 1322
12. Бурланков Д. Е. *Время, пространство, тяготение.* – М. – Ижевск: НИЦ ”Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2006. – 420 с.
13. Бурланков Д. Е. *Анализ общей теории относительности*: Монография. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. – 239 с.
14. Рубан В. П. *Идеальная гидродинамика снаружи и внутри чёрной дыры: Гамильтоново описание в координатах Пенлеве – Гуллстранда.* ЖЭТФ, 2014, том 146, вып. 1 (7). стр. 96–104