Движение в окрестности чёрной дыры

Губанов Сергей Юрьевич*

27 ноября 2006 г.

Аннотация

Доказано, что в пространстве-времени чёрной дыры собственные времена двух частиц летящих по инерции прошедшие с момента их первой встречи до момента второй встречи (если таковая случится) в общем случае будут разными. Обсуждаются физические последствия этого факта.

Уравнения движения. Вывод уравнений движения позаимствован из монографии [1]. Метрика пространства-времени чёрной дыры в системе отсчёта Пэнлевэ:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr - V dt)^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2, \tag{1}$$

$$V = -c\sqrt{\frac{a}{r}}, \tag{2}$$

где a - Шварцшильдовский гравитационный радиус. Уравнение Гамильтона-Якоби в этой системе отсчёта:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + V\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 - \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = m^2c^2. \tag{3}$$

Канонические импульсы:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial r} = p_r, \quad \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = p_\vartheta, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi. \tag{4}$$

Функция связи:

$$F = \frac{mc^2}{2}\left[1 + \frac{1}{m^2c^2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)}\right)\right) - \left(\frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc}\sqrt{\frac{a}{r}}\right)^2\right] = 0. \tag{5}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases}
\dfrac{dt}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial E} = \dfrac{E}{mc^2} + \dfrac{p_r}{mc}\sqrt{\dfrac{a}{r}}, \\
\dfrac{dE}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0, \\
\dfrac{dr}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial p_r} = \left(1 - \dfrac{a}{r}\right)\dfrac{p_r}{m} - \dfrac{E}{mc}\sqrt{\dfrac{a}{r}}, \\
\dfrac{dp_r}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)}}{m\, r^3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{r}}\left(\dfrac{E}{mc^2} + \dfrac{p_r}{mc}\sqrt{\dfrac{a}{r}}\right)\dfrac{cp_r}{r}, \\
\dfrac{d\vartheta}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial p_\vartheta} = \dfrac{p_\vartheta}{m\, r^2}, \\
\dfrac{dp_\vartheta}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta} = \dfrac{p_\varphi^2}{m\, r^2}\dfrac{\cos(\vartheta)}{\sin^3(\vartheta)}, \\
\dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m\, r^2}\dfrac{1}{\sin^2(\vartheta)}, \\
\dfrac{dp_\varphi}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = 0.
\end{cases} \tag{6}$$

Выразив канонические импульсы через скорости и подставив полученные выражения в функцию связи (5) получим:

$$F = \frac{mc^2}{2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{d\tau} - V\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{c^2}r^2\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{c^2}r^2\sin^2(\vartheta)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\right] = 0. \tag{7}$$

*gubanov@itp.ac.ru

Откуда,

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - (dr - V dt)^2 - r^2d\vartheta^2 - r^2\sin^2(\vartheta)d\varphi^2 \equiv ds^2. \tag{8}$$

Следовательно параметр τ - собственное время движущейся частицы. Решим уравнение связи (5) относительно энергии, оно имеет два решения:

$$H_\pm = mc^2\left[-\frac{p_r}{mc}\sqrt{\frac{a}{r}} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{m^2c^2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)}\right)\right)}\,\right]. \tag{9}$$

Легко проверить истинность следующего соотношения со скобками Пуассона:

$$\left\{H_\pm,\ p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)}\right\} = 0. \tag{10}$$

Согласно уравнениям движения (6) энергия сохраняется, следовательно функция из (10) тоже интеграл движения:

$$L^2 = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)} = const. \tag{11}$$

Решая систему уравнений (6) относительно ϑ и p_ϑ получаем: $\vartheta = \pi/2$ и $p_\vartheta = 0$, следовательно $p_\varphi = L$. Выпишем оставшиеся уравнения:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc}\sqrt{\frac{a}{r}}\,, \tag{12}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\frac{p_r}{m} - \frac{E}{mc}\sqrt{\frac{a}{r}}\,, \tag{13}$$

$$\frac{dp_r}{d\tau} = \frac{L^2}{m\,r^3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{r}}\left(\frac{E}{mc^2} + \frac{p_r}{mc}\sqrt{\frac{a}{r}}\right)\frac{cp_r}{r}, \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m\,r^2}. \tag{15}$$

Решим уравнение связи (5) относительно радиального канонического импульса p_r, оно имеет два решения:

$$p_{r\pm} = \frac{mc}{1 - \frac{a}{r}}\left[\frac{E}{mc^2}\sqrt{\frac{a}{r}} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{L^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right)}\,\right]. \tag{16}$$

Подстановка (16) в (13) даёт:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c\,\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{L^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right)}\,. \tag{17}$$

Откуда становится ясен физический смысл двух решений для $p_{r\pm}$. Одно из них описывает движение "вверх": $dr/d\tau > 0$; другое "вниз": $dr/d\tau < 0$. Уравнение (17) определено всюду где

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{L^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right), \tag{18}$$

в том числе и под гравитационным радиусом $r < a$. Забавно, что уравнение (17) одинаково описывая как движение вверх так и вниз, само по себе, не запрещает частицам вылетать из области $r < a$ в область $r > a$, т. е. покидать чёрную дыру.

Движение по окружности. При движении по окружности радиуса $r = R$ имеем $dr/d\tau = 0$ и $dp_r/d\tau = 0$, решая эти уравнения можно выразить орбитальный момент L и энергию частицы E как функции от R:

$$L_R = m\,c\,R\sqrt{\frac{a}{R}}\frac{1}{\sqrt{2 - 3\frac{a}{R}}}\,, \tag{19}$$

$$E_R = m\,c^2\sqrt{\left(1 + \frac{L_R^2}{m^2c^2R^2}\right)\left(1 - \frac{a}{R}\right)}\,. \tag{20}$$

Период обращения по собственному времени:

$$\tilde{T}_R = 2\pi \frac{m\,R^2}{L_R}\ , \tag{21}$$

по координатному времени Пэнлевэ:

$$T_R = \frac{E_R}{m\,c^2} \frac{\tilde{T}_R}{1 - \frac{a}{R}}. \tag{22}$$

В частности, при $R \to \frac{3}{2}a$ период обращения по собственному времени стремится к нулю, а тангенциальная скорость в собственной системе отсчёта, соответственно, стремится к бесконечности. В системе отсчёта Пэнлевэ период обращения стремится к $3\sqrt{3}\pi a/c$, соответственно, тангенциальная скорость к $1/\sqrt{3}\ c \approx 0.57735\ c$. Учитывая радиальную скорость (2) относительно "падающей" на центр координатной сетки инерциальной системы отсчёта, полная скорость движения относительно ИСО стремиться к $\sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2/3})^2}\ c = c$, что и интуитивно ожидалось.

Чисто радиальное движение. Положив $L = 0$ получим из (17) уравнение для чисто радиального движения:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c\,\sqrt{\frac{a}{r} + \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}\ . \tag{23}$$

Решим следующую задачу. Допустим частицу находящуюся на "высоте" $r = r_1$ подбросили вертикально "вверх". Она долетела до некоторой "высоты" $r = r_2$, а затем упала обратно. Поскольку в точке $r = r_2$ она на мгновение остановилась, следовательно $dr/d\tau$ обратилась в ноль, отсюда находим её энергию: $E = m\,c^2\sqrt{1 - a/r_2}$. Подставляем это значение энергии в (23), получаем:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c\,\sqrt{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}\ . \tag{24}$$

Как на движение из точки r_1 в точку r_2 так и на обратное движение частица тратит одинаковое количество собственного времени:

$$\begin{aligned} \tau_{12} = \tau_{21} \quad &= \quad \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}} \\ &= \quad \frac{1}{c}\frac{r_1 r_2}{a}\left[\sqrt{\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}} + \frac{a}{r_1}\sqrt{\frac{r_2}{a}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r_2}{r_1} - 1}}\right)\right)\right]\ . \end{aligned} \tag{25}$$

Две частицы. Пусть теперь есть две частицы. Одна частица совершает круговое движение на высоте r_1, а вторую частицу мы подбрасываем вверх с этой же высоты в тот момент времени когда они находятся в одной и той же точке пространства. Совершив полный оборот за собственное время $\tilde{T}_{r_1}$ определяемое формулой (21) первая частица вернётся в исходную точку. Подберём высоту подъёма r_2 второй частицы так, чтобы на подъём и обратный спуск она потратила ровно то же самое количество собственного времени $\tilde{T}_{r_1}$, что и первая. Спрашивается, встретятся ли эти частицы в одной и той же точке или разминутся? Комбинируя (24) с (12) получаем уравнение чисто радиального движения по координатному времени Пэнлевэ:

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{a}{r}\right)\left[\sqrt{\frac{a}{r}} \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{a}{r_2}}{\frac{a}{r} - \frac{a}{r_2}}}\right]^{-1}. \tag{26}$$

Знаки $\pm$ в (26) как и в (24) отвечают за движение "вверх" и "вниз". Уравнение (26) в отличие от (24) не разрешает частицам вылетать из под горизонта чёрной дыры. Время в пути между точками r_1 и r_2:

$$t_{12} \quad = \quad \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{\frac{a}{r}} + \sqrt{\frac{1-\frac{a}{r_2}}{\frac{a}{r}-\frac{a}{r_2}}}}{1 - \frac{a}{r}} dr \tag{27}$$

$$t_{21} \quad = \quad \frac{1}{c}\int_{r_2}^{r_1} \frac{\sqrt{\frac{a}{r}} - \sqrt{\frac{1-\frac{a}{r_2}}{\frac{a}{r}-\frac{a}{r_2}}}}{1 - \frac{a}{r}} dr \tag{28}$$

Нас интересует их сумма:

$$
\begin{aligned}
t_{12}+t_{21} &= \frac{2}{c}\sqrt{1-\frac{a}{r_2}}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\left(1-\frac{a}{r}\right)\sqrt{\frac{a}{r}-\frac{a}{r_2}}} \\
&= \frac{2}{c}\sqrt{1-\frac{a}{r_2}}\left[\frac{r_1 r_2}{a}\sqrt{\frac{a}{r_1}-\frac{a}{r_2}}+(r_2+2a)\sqrt{\frac{r_2}{a}}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)\right)\right] \\
&+ \frac{4a}{c}\,\mathrm{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\frac{a}{r_1}-\frac{a}{r_2}}{1-\frac{a}{r_2}}}\right).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Следующая система уравнений относительно неизвестных r_1 и r_2

$$
\begin{cases}
\tau_{r_1 r_2}+\tau_{r_2 r_1}=\tilde{T}_{r_1}, \\
t_{r_1 r_2}+t_{r_2 r_1}=T_{r_1},
\end{cases}
\tag{30}
$$

вещественных решений не имеет. Если две частицы вновь встретятся их собственные времена прошедшие с момента первой встречи окажутся разными.

Обсуждение результата. В теоретической физике закон движения частиц выводится из принципа наименьшего действия. Истинной траекторией движения считается та, действие на которой минимально. В то же самое время для вывода уравнений движения приравнивают к нулю одну лишь только первую вариацию действия. Для частиц действие пропорционально их собственному времени:

$$
S=-m\,c^2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau,
\tag{31}
$$

и, как было показано выше, существуют различные дважды пересекающиеся траектории первая вариация действия вдоль которых равна нулю, а действие, т. е. собственное время на них, разное. Есть более одного пути из одной точки в другую, на одном из них действие меньше чем на втором, но они оба одинаково истинные. Как к этому относиться, как к парадоксу? Стоит ли в таких случаях занулять вторую, третью и т. д. вариации действия? В квантовой механике в квазиклассическом приближении действие играет роль фазы и, казалось бы, вдоль двух одинаково истинных дважды пересекающихся траекторий набег фазы должен быть одинаковым, но это оказывается не так...

Список литературы

[1] Д. Е. Бурланков, *Динамика пространства*, монография, Нижний Новгород, ННГУ, 2005, 179 стр.