Сферически симметричное гравитационное поле

С. Ю. Губанов*

5 января 2017 г.

Аннотация

Найдено общее решение системы уравнений ОТО для изотропной Вселенной с плоским пространственным сечением и синхронизируемым временем с учётом идеальной пыли и космологической постоянной. Решения Шварцшильда, Фридмана, Эйнштейна – де Ситтера, а так же все их объединения друг с другом являются частными случаями найденного общего решения. Найден способ порождения бесконечного количества семейств решений Толменовского типа. Найдены точные решения для пылевого облака в расширяющейся Вселенной заполненной излучением. Выписаны обыкновенные дифференциальные уравнения для пылевого облака во Вселенной заполненной излучением и нерелятивистским газом. Выписана система уравнений описывающая гравитационное поле сферически симметричного ультрарелятивистского взрыва звезды. Обсуждается проблема отрицательной плотности энергии в решениях ОТО и способ как эту проблему обойти.

Ключевые слова: гравитация, космология, точные решения, ОТО

PACS codes: 04.20.Jb, 04.70.Bw

1 Введение

Рассмотрим модель *изотропной* Вселенной с *плоским* пространственным сечением и *синхронизируемым* временем. В этом случае метрика зависит всего от одной функции $V(t, r)$ и представима в следующем виде (см. раздел *Пространственно-временная структура*):

$$ds^2 = dt^2 - (dr - V(t, r)\, dt)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2. \tag{1}$$

К метрике вида (1) с помощью соответствующих преобразований координат могут быть приведены следующие известные метрики: метрика Шварцшильда [1]; метрика Рейснера – Нордстрема [2], [3]; метрика Эйнштейна – де Ситтера [4]; метрика Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера с плоским пространственным сечением [5]; метрика Толмена в случае плоского пространственного сечения [6].

*s.yu.gubanov@inbox.ru

Объединённая метрика Шварцшильда, Рейснера – Нордстрема и Эйнштейна – де Ситтера

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\kappa M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{r^2} - \frac{4}{9}\lambda^2 r^2\right) d\tilde{t}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\kappa M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{r^2} - \frac{4}{9}\lambda^2 r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \tag{2}$$

приводится к виду (1)

$$ds^2 = dt^2 - \left(dr \pm \sqrt{\frac{2\kappa M}{r} - \frac{\kappa Q^2}{r^2} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2}\, dt\right)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \tag{3}$$

при помощи замены Пэнлеве – Гуллстранда [7], [8]

$$d\tilde{t} = dt \pm \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{r} - \frac{\kappa Q^2}{r^2} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2}}{1 - \frac{2\kappa M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{r^2} - \frac{4}{9}\lambda^2 r^2} dr. \tag{4}$$

Метрика Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера с плоским пространственным сечением

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right) \tag{5}$$

приводится к виду (1)

$$ds^2 = dt^2 - \left(dr - r\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\, dt\right)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \tag{6}$$

при помощи замены радиусной координаты $\tilde{r}$

$$\tilde{r}(t, r) = \frac{r}{a(t)}. \tag{7}$$

Метрика Толмена имеет две произвольные функции $M(\xi)$ и $W(\xi)$:

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi}{W(\xi)}\right)^2 - r^2(t, \xi) \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2\right). \tag{8}$$

Функция $r(t, \xi)$ является решением уравнения:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \pm\sqrt{\frac{2\kappa M(\xi)}{r} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2 + W^2(\xi) - 1}. \tag{9}$$

При формальном использовании функции $r(t, \xi)$ в качестве радиусной координаты метрика принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{dr \mp \sqrt{\frac{2\kappa M}{r} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2 + W^2 - 1}\, dt}{W}\right)^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2\right), \tag{10}$$

и при $W = 1$ совпадает с (1). Случай $W \neq 1$ далее рассмотрен отдельно.

Так как несколько известных и, казалось бы, не связанных друг с другом метрик сводятся к виду (1), представляет интерес для метрики (1), зависящей всего от одной функции $V(t,r)$, найти *общее решение* системы уравнений ОТО с учётом идеальной пыли, газа, излучения и космологической постоянной:

$$G_{\mu\nu} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{\mu\nu} = 8\pi\kappa\, T_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Общее решение $V(t,r)$ должно в частных случаях давать решение Шварцшильда, Фридмана, Эйнштейна – де Ситтера, а так же все возможные их объединения друг с другом.

2 Вакуумно - пылевые решения

В этом разделе рассмотрены решениия системы (11) с учётом идеальной пыли и космологической постоянной.

2.1 Тензор Эйнштейна

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна для метрики (1) имеют следующий вид:

$$G_{tt} = -\frac{V}{r^2}\left(V^3 - 2rV'(1-V^2) + V(2r\dot{V} - 1)\right), \tag{12}$$

$$G_{tr} = \frac{2V}{r^2}\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right), \tag{13}$$

$$G_{rr} = -\frac{2}{r^2}\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right), \tag{14}$$

$$G_{\theta\theta} = -r\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right)', \tag{15}$$

$$G_{\varphi\varphi} = -r\sin^2(\theta)\left(r\dot{V} + \frac{1}{2}\left(rV^2\right)'\right)'. \tag{16}$$

Точкой и штрихом обозначено дифференцирование по t и по r соответственно. Использовано определение для тензора Эйнштейна принятое в [9].

2.2 Тензор энергии импульса идеальной пыли

Тензор энергии импульса идеальной пыли имеет следующий вид [9]:

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu. \tag{17}$$

Четырёхскорость u^μ идеальной пыли удовлетворяет следующим уравнениям

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1, \quad u^\mu \left(\nabla_\mu u^\nu\right) = 0. \tag{18}$$

Решая уравнения (18) в метрике (1) для сопутствующей идеальной пыли получаем:

$$u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial r}, \quad u_\mu dx^\mu = dt. \tag{19}$$

Поэтому для метрики (1) тензор энергии–импульса имеет всего одну отличную от нуля компоненту

$$T_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \rho\, dt^2. \tag{20}$$

Из равенства нулю дивергенции тензора энергии импульса следует уравнение неразрывности плотности потока пыли:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \to \quad \nabla_\mu \left(\rho u^\mu\right) = 0 \quad \to \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho\, V\right) = 0. \tag{21}$$

Плотность массы пыли ρ в (17) является *скаляром*, в то время как *плотность энергии* пыли является *компонентой тензора* T_{tt}. В данном случае они численно совпадают $T_{tt} = \rho$ в силу (19).

2.3 Система уравнений

Благодаря тождествам Гильберта [10] уравнение (21) уже содержится в системе уравнений (11) с правой частью (20). Поэтому решение системы (11) ищется следующим образом. Сначала решаются tr, rr, $\theta\theta$, $\varphi\varphi$ – уравнения, то есть те уравнения которые имеют нулевую правую часть. Легко видеть, что tr, rr, $\theta\theta$, $\varphi\varphi$ – уравнения сводятся всего к одному уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2 - \frac{4}{9}\lambda^2 r^3\right) = 0. \tag{22}$$

При этом

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = -\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{23}$$

Далее, найденное решение уравнения (22) подставляется в единственное оставшееся нерешённым tt–уравнение ОТО:

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = 8\pi\kappa\rho \tag{24}$$

Получившаяся левая часть tt–уравнения ОТО используется в качестве определения для плотности ρ сопутствующей идеальной пыли:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi\kappa\, r}\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{25}$$

2.4 Общее решение

Общее решение $V_{[F]}(t,r)$ уравнения (22) записывается в неявном виде:

$$F\left(\sqrt{r}\left(\cosh(\lambda t)V_{[F]}-\frac{2\lambda r}{3}\sinh(\lambda t)\right),\sqrt{r}\left(\sinh(\lambda t)V_{[F]}-\frac{2\lambda r}{3}\cosh(\lambda t)\right)\right)=0. \tag{26}$$

В случае $\lambda=0$:

$$\tilde{F}\left(\sqrt{r}\,V_{[\tilde{F}]},\sqrt{r}\left(t\,V_{[\tilde{F}]}-\frac{2r}{3}\right)\right)=0. \tag{27}$$

Здесь $F(\alpha,\beta)$ – произвольная вещественная дифференцируемая функция двух переменных.

2.5 Некоторые частные решения

Решение 1 Выбор функции $F(\alpha,\beta)=\alpha\pm\sqrt{2\kappa M}$ даёт:

$$V^{\pm}=\frac{2}{3}\lambda r\tanh(\lambda t)\pm\frac{1}{\cosh(\lambda t)}\sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}. \tag{28}$$

$$G^{\pm}_{tt}-\frac{4}{3}\lambda^2 g^{\pm}_{tt}=\frac{2\lambda}{3r\cosh^2(\lambda t)}\left(-2\lambda r\pm 3\sinh(\lambda t)\sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}\right). \tag{29}$$

При $\lambda=0$ получаем:

$$V=\pm\sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}. \tag{30}$$

$$G_{tt}=0. \tag{31}$$

Это решение Шварцшильда записанное в системе координат Пэнлеве–Гуллстранда.

Решение 2 Выбор функции $F(\alpha,\beta)=\beta$ даёт:

$$V=\frac{2}{3}\lambda r\coth(\lambda t), \tag{32}$$

$$G_{tt}-\frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt}=\frac{4\lambda^2}{3\sinh^2(\lambda t)}. \tag{33}$$

При $\lambda=0$ получаем:

$$V=\frac{2r}{3t}, \tag{34}$$

$$G_{tt}=\frac{4}{3t^2}. \tag{35}$$

Это решение Фридмана с плоским пространственным сечением.

Решение 3 Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ даёт:

$$V = \frac{2}{3} r \lambda, \tag{36}$$

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = 0. \tag{37}$$

Это решение Эйнштейна – де Ситтера.

Решение 4 Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 - \beta^2 - 2\kappa M$ даёт:

$$V^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{2\kappa M}{r} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2}, \tag{38}$$

$$G^{\pm}_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g^{\pm}_{tt} = 0. \tag{39}$$

Это минимальное объединение решений Шварцшильда и Эйнштейна – де Ситтера.

Решение 5 Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \beta \mp \lambda R^{3/2}$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{2}{3}\lambda r \coth(\lambda t) \pm \frac{\lambda R}{\sinh(\lambda t)}\sqrt{\frac{R}{r}}, \tag{40}$$

$$G^{\pm}_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g^{\pm}_{tt} = \frac{4\lambda^2}{3\sinh^2(\lambda t)}\left(1 \pm \frac{3}{2}\cosh(\lambda t)\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}\right). \tag{41}$$

При $\lambda = 0$ получаем решение Бурланкова [11]:

$$V^{\pm} = \frac{2r}{3t} \pm \frac{R}{t}\sqrt{\frac{R}{r}}, \tag{42}$$

$$G^{\pm}_{tt} = \frac{4}{3t^2}\left(1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}\right). \tag{43}$$

Это минимальный вариант объединения решения Шварцшильда и решения Фридмана с плоским пространственным сечением.

Решение 6 Выбор функции $F(\alpha, \beta) = A\alpha + B\beta$ даёт:

$$V = \frac{2\lambda r}{3}\,\frac{A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)}{A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t)}, \tag{44}$$

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \frac{4\lambda^2\left(B^2 - A^2\right)}{3\left(A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t)\right)^2}. \tag{45}$$

Это минимальный вариант объединения решения Эйнштейна – де Ситтера и решения Фридмана с плоским пространственным сечением. При $B = 0$ отсутствует космологическая сингулярность.

Решение 7 Выбор функции $F(\alpha, \beta) = A\alpha + B\beta \mp \sqrt{2\kappa M}$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{1}{A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t)} \left(\pm\sqrt{\frac{2\kappa M}{r}} + \frac{2}{3}\lambda r\left(A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)\right) \right), \tag{46}$$

$$G_{tt}^{\pm} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt}^{\pm} = \frac{4\lambda^2\left((B^2 - A^2) \pm \frac{3}{2\lambda r}\sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}\left(A\sinh(\lambda t) + B\cosh(\lambda t)\right)\right)}{3(A\cosh(\lambda t) + B\sinh(\lambda t))^2}. \tag{47}$$

Это минимальный вариант объединения решений Шварцшильда, Эйнштейна – де Ситтера и решения Фридмана с плоским пространственным сечением.

Решение 8 Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha\beta - R^2$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{2}{3}\lambda r\coth(2\lambda t) \pm \frac{\sqrt{4\lambda^2 r^4 + 18R^2 r\sinh^2(2\lambda t)}}{3r\sinh(2\lambda t)} \tag{48}$$

Выражение для плотности энергии слишком громоздко что бы привести его здесь. При $\lambda = 0$ получаем:

$$V^{\pm} = \frac{r}{3t}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{9R^2 t}{r^3}}\right), \tag{49}$$

$$G_{tt}^{\pm} = \frac{2}{3t^2}\left(1 \pm \frac{1 + \frac{9R^2 t}{2r^3}}{\sqrt{1 + \frac{9R^2 t}{r^3}}}\right). \tag{50}$$

При $R = 0$ и выборе знака плюс получается решение Фридмана.

Решение 9 Выбор функции $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \frac{A}{\lambda}\beta$ даёт:

$$V^{\pm} = \frac{\lambda r\sinh(2\lambda t)}{3\cosh^2(\lambda t)} - \frac{A\tanh(\lambda t)}{2\lambda\sqrt{r}\cosh(\lambda t)} \pm \frac{\sqrt{8Ar^{5/2}\cosh(\lambda t) + 3A^2 r\lambda^{-2}\sinh^2(\lambda t)}}{2\sqrt{3}r\cosh^2(\lambda t)} \tag{51}$$

Выражение для плотности энергии слишком громоздко что бы привести его здесь. При $\lambda = 0$ получаем:

$$V^{\pm} = -\frac{At}{2\sqrt{r}} \pm \frac{\sqrt{8Ar^{5/2} + 3A^2 rt^2}}{2\sqrt{3}r}, \tag{52}$$

$$G_{tt}^{\pm} = \frac{A}{r^{3/2}} \mp \frac{A^2 t}{r\sqrt{(8/3)Ar^{5/2} + A^2 rt^2}}. \tag{53}$$

Это решение взятое со знаком минус описывает сжимающуюся Вселенную с чёрной дырой, гравитационный радиус которой увеличивается со временем (см. следующий раздел).

2.6 Гравитационный радиус пылевого облака и видимый горизонт Вселенной

Гравитационный радиус пылевого облака $r_g(t)$, а так же радиус видимого горизонта Вселенной зависят от времени и для метрики (1) определяются уравнением

$$1 - V(t, r_g(t))^2 = 0. \tag{54}$$

Для решения (42) взятого со знаком плюс уравнение (54) имеет два вещественных неотрицательных корня $r_g^{(1)}(t)$ и $r_g^{(2)}(t)$ со следующим асимптотическим поведением при $t \to \infty$:

$$r_g^{(1)}(t) \approx \frac{R^3}{t^2} + \frac{4R^6}{3t^5} + \frac{28R^9}{9t^8} + O(t^{-11}) \tag{55}$$

$$r_g^{(2)}(t) \approx \frac{3t}{2} - \sqrt{\frac{3R^3}{2t}} - \frac{R^3}{2t^2} - \sqrt{\frac{25R^9}{96t^7}} + O(t^{-5}) \tag{56}$$

Корень $r_g^{(1)}(t)$ – гравитационный радиус рассеивающегося пылевого облака, асимптотически уменьшется как t^{-2} (центральное ядро облака теряет массу). Корень $r_g^{(2)}(t)$ – видимый горизонт расширяющейся Вселенной (асимптотическое поведение как в решении Фридмана со Вселенной однородно заполненной пылью).

Для решения (49) взятого со знаком плюс уравнение (54) тоже имеет два вещественных неотрицательных корня:

$$r_g^{(1)}(t) = \frac{3t}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8R^2}{3t^2}}\right) \approx \frac{R^2}{t} + \frac{2R^4}{3t^3} + O(t^{-5}); \tag{57}$$

$$r_g^{(2)}(t) = \frac{3t}{4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8R^2}{3t^2}}\right) \approx \frac{3t}{2} - \frac{R^2}{t} - \frac{2R^4}{3t^3} + O(t^{-5}). \tag{58}$$

Решения (42) и (49) имея одинаковую – фридмановскую – асимптотику по расширяющемуся видимому горизонту, имеют разную асимптотику по уменьшающемуся гравитационному радиусу: R^3/t^2 против R^2/t. Пылевое облако (42) рассеивается быстрее чем (49).

Теперь рассмотрим асимптотику $t \to +\infty$ решения (52) взятого со знаком минус при $A \neq 0$:

$$V \approx -\frac{At}{\sqrt{r}} - \frac{2r}{3t} + O(t^{-3}). \tag{59}$$

Первый член отвечает за массивное ядро коллапсирующего пылевого облака, переобозначим его следующим образом

$$-\frac{At}{\sqrt{r}} = -\sqrt{\frac{2\kappa M(t)}{r}}, \quad M(t) = \frac{A^2 t^2}{2\kappa}. \tag{60}$$

Гравитационный радиус этого коллапсирующего пылевого облака асимптотически растёт со временем как t^2. Отрицательный линейный по r член отвечает за сжатие Вселенной.

2.7 Порождение бесконечного количества семейств решений Толменовского типа

Обобщение метрики (1) на случай неплоского пространственного сечения имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{dr - V(t,r)\,dt}{W(t,r)}\right)^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right). \tag{61}$$

Для метрики (61) система уравнений (11) принимает следующий вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2 - \frac{4}{9}\lambda^2 r^3\right) - \frac{W^2-1}{2r} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + V\frac{\partial W}{\partial r} = 0. \tag{62}$$

При этом

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = -\frac{2}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + W\frac{\partial W}{\partial r}\right). \tag{63}$$

Рассмотрим статическое вакуумное решение:

$$V(r) = \pm\sqrt{\frac{2\kappa M}{r} + \frac{4}{9}\lambda^2 r^2 + W^2 - 1}, \quad M = const, \quad W = const, \quad \rho = 0. \tag{64}$$

Осуществим переход в *синхронную систему* координат $(t,r) \to (t,\xi)$:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = V \quad \to \quad dr - V dt = \frac{\partial r}{\partial \xi}d\xi. \tag{65}$$

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\frac{\partial r}{\partial \xi}d\xi}{W}\right)^2 - r^2(t,\xi)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right). \tag{66}$$

Зависимость r от ξ произвольная, требуется лишь $(\partial r/\partial \xi) \neq 0$. Если теперь вместо константных M и W взять произвольные функции $M(\xi)$ и $W(\xi)$, то получится решение Толмена [6] с ненулевой плотностью энергии:

$$G_{tt} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{tt} = \frac{2\kappa\frac{\partial M}{\partial \xi}}{r^2\frac{\partial r}{\partial \xi}}. \tag{67}$$

Аналогичную программу действий можно осуществить с любым решением $V_{[F]}(t,r)$ системы (62). Решения системы (62) можно использовать для порождения новых решений *Толменовского типа*: переход в синхронную систему координат $(t,r) \to (t,\xi)$ и последующая замена набора констант интегрирования $(C_1, C_2, \ldots)$ от которых зависит $V_{[F]}(t,r)$

$$V_{[F]}(t,r) = V_{[C_1,C_2,\ldots]}(t,r) \tag{68}$$

на произвольные функции от ξ

$$V_{[C_1, C_2, \dots]}(t, r) \to V_{[C_1(\xi), C_2(\xi), \dots]}(t, r(t, \xi)) \tag{69}$$

даёт новое семейство решений. Например, возьмём решение (42), перейдём в синхронную систему координат согласно (80):

$$\frac{\partial r}{\partial t}^{\pm} = \frac{2r}{3t} \pm \frac{R}{t}\sqrt{\frac{R}{r}}. \tag{70}$$

Если теперь константу R заменить на произвольную функцию $R(\xi)$, то получим новое семейство решений *Толменовского типа* со следующей плотностью энергии

$$G_{tt} = \frac{4}{3t^2}\left(1 \pm \frac{3R}{2r}\sqrt{\frac{R}{r}}\right)\left(1 \pm \frac{3R\frac{\partial R}{\partial \xi}}{2r\frac{\partial r}{\partial \xi}\sqrt{\frac{R}{r}}}\right) \tag{71}$$

В качестве ещё одного примера возьмём решение (49), перейдём в синхронную систему координат согласно (80):

$$\frac{\partial r}{\partial t}^{\pm} = \frac{r}{3t}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{9R^2 t}{r^3}}\right). \tag{72}$$

Если теперь константу R заменить на произвольную функцию $R(\xi)$, то получим новое семейство решений *Толменовского типа* со следующей плотностью энергии

$$G_{tt} = \frac{1}{3t^2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9tR^2}{r^3}}}\right)\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{9tR^2}{r^3} + \frac{6tR\frac{\partial R}{\partial \xi}}{r^2\frac{\partial r}{\partial \xi}}}\right). \tag{73}$$

Решения системы (62) являются генераторами (производящими функциями) новых решений *Толменовского типа.*

3 Пылевое облако в расширяющейся Вселенной заполненной излучением

В этом разделе рассматривается задача о сферически симметричном пылевом облаке во Вселенной заполненной ультрарелятивистским газом (излучением). Для учёта давления газа $p(t, r)$ нужно в правую часть системы (11) подставить

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu + (\varepsilon + p)\, v_\mu v_\nu - p\, g_{\mu\nu}. \tag{74}$$

Здесь ρ, u_μ – плотность и четырёхскорость идеальной пыли, ε, p, v_μ – плотность, давление и четырёхскорость газа. Для начала рассмотрим случай когда Вселенную заполняет одно лишь излучение при $\lambda = 0$. Уравнения системы (11) для метрики (1):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2\right) = -4\pi\kappa\, r\, p. \tag{75}$$

$$v_\mu dx^\mu = dt, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \varepsilon = 3p, \quad \rho = 0. \tag{76}$$

Решение:

$$V(t,r) = \frac{r}{2t}, \quad p(t) = \frac{1}{32\pi\kappa t^2}, \quad \varepsilon = 3p, \quad \rho = 0. \tag{77}$$

Согласно (6) это соответствует Фридмановскому масштабному фактору $a(t) = A\sqrt{t}$. Теперь найдём частные решения (75) с тем же давлением излучения $p(t)$, но с ненулевой плотностью пыли ρ. Простейшее частное решение удовлетворяющее этому критерию:

$$V(t,r) = \frac{r}{2t} \pm \sqrt{\frac{2kM(t)}{r}}, \quad M(t) = \frac{Q^2}{2\kappa\, t^{3/2}}, \quad \rho = \frac{3Q}{16\pi\kappa\, t^{7/4} r^{3/2}}. \tag{78}$$

Гравитационный радиус такого облака асимптотически уменьшается как $t^{-3/2}$. Выпишем ещё одно частное решение (75):

$$V(t,r) = \frac{r}{3t}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{R^2 t}{r^3}}\right), \quad \rho = \frac{\frac{R^2 t}{r^3} + 2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{R^2 t}{r^3}}\right)}{48\pi\kappa\, t^2 \sqrt{1 + \frac{R^2 t}{r^3}}}. \tag{79}$$

Гравитационный радиус такого облака асимптотически уменьшается как t^{-1}. Решение (78) *порождает* следующее семейство решений Толменовского типа. Осуществим переход в *синхронную систему* координат $(t,r) \to (t,\xi)$:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{r(t,\xi)}{2t} + \frac{Q}{t^{3/4}\sqrt{r(t,\xi)}}, \quad dr - \frac{\partial r}{\partial t}dt = \frac{\partial r}{\partial \xi}d\xi. \tag{80}$$

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\, d\xi\right)^2 - r^2(t,\xi)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right). \tag{81}$$

Если теперь константу Q заменить на произвольную функцию $Q(\xi)$, то получится новое семейство решений Толменовского типа со следующей плотностью пыли

$$\rho = \frac{2r^{3/2}\frac{\partial Q}{\partial \xi} + Q\left(4t^{1/4}\frac{\partial Q}{\partial \xi} + 3\sqrt{r}\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)}{16\pi\kappa\, t^{7/4} r^2 \frac{\partial r}{\partial \xi}} \tag{82}$$

Решение (79) *порождает* следующее семейство решений Толменовского типа. Осуществим переход в *синхронную систему* координат $(t,r) \to (t,\xi)$:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{r(t,\xi)}{3t}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{R^2 t}{r^3(t,\xi)}}\right), \quad dr - \frac{\partial r}{\partial t}dt = \frac{\partial r}{\partial \xi}d\xi. \tag{83}$$

Если теперь константу R заменить на произвольную функцию $R(\xi)$, то получится новое семейство решений Толменовского типа со следующей плотностью пыли

$$\rho = \frac{rtR\frac{\partial R}{\partial \xi}\left(2 + \sqrt{1 + \frac{tR^2}{r^3}}\right) + 3r^3\frac{\partial r}{\partial \xi}\left(\frac{tR^2}{r^3} - 2\left(\sqrt{1 + \frac{tR^2}{r^3}} - 1\right)\right)}{144\pi\kappa\, t^2 r^3 \frac{\partial r}{\partial \xi}\sqrt{1 + \frac{tR^2}{r^3}}.} \tag{84}$$

Давлению (77) соответствует бесконечно много частных решений $V_{[F]}(t,r)$ в неявном виде задаваемых как решение уравнения

$$F\left(\frac{\sqrt{r}}{t^{1/4}}\left(2t\,V_{[F]}(t,r)-r\right),\frac{\sqrt{r}}{t^{3/4}}\left(6t\,V_{[F]}(t,r)-r\right)\right)=0, \tag{85}$$

здесь $F(\alpha,\beta)$ – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов. Однородное решение $V=r/(2t)$ отвечает за случай $\varepsilon=3p$, Однородное решение $V=r/(6t)$ формально отвечает за случай $\varepsilon=(1/3)p$. Так как они оба дают в точности одинаковую формулу (77) для зависимости давления от времени, то общее решение содержит их произвольную комбинацию. Если интересоваться только излучением, то надо выбирать из (85) только те решения, которые асимптотически стремятся к $V=r/(2t)$. Проблема возможной отрицательной плотности энергии рассматривается далее в разделе *Уравнения гравитационного поля*.

4 Пылевое облако во Вселенной заполненной излучением и нерелятивистским газом

Пусть $a(t)$ – Фридмановский масштабный фактор из (5), согласно (7) ему соответствует радиальное поле скоростей $V(t,r)=r\,\dot{a}(t)/a(t)$. Будем искать решение системы (11) в следующем виде:

$$V(t,r)=r\,\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\pm\sqrt{\frac{2\kappa M(t)}{r}+\frac{4}{9}\lambda^2r^2L(t)}, \tag{86}$$

$$p(t)=\frac{\Omega_r}{a^4(t)}+\frac{\Omega_b}{a^3(t)}. \tag{87}$$

$$u_\mu dx^\mu=dt,\quad v_\mu dx^\mu=dt. \tag{88}$$

В (87) член с Ω_r отвечает за радиационное давление, член с Ω_b – за давление нерелятивистского (барионного) газа. Система (11) сводится к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{a}(t)=-\frac{\dot{a}^2(t)}{2a(t)}-4\pi\kappa\left(\frac{\Omega_b}{a^2(t)}+\frac{\Omega_r}{a^3(t)}\right)+\frac{2}{3}\lambda^2a(t)(1-L(t)), \tag{89}$$

$$\dot{L}(t)=-6L(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \tag{90}$$

$$\dot{M}(t)=-3M(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \tag{91}$$

При этом, суммарная плотность пыли, газа и излучения:

$$\rho + \varepsilon = \frac{3}{8\pi\kappa}\left(\frac{4\lambda^2}{9}\left(L(t)-1\right) + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \pm \frac{\dot{a}(t)}{ra(t)}\frac{\frac{2\kappa M(t)}{r} + \frac{8}{9}r^2\lambda^2 L(t)}{\sqrt{\frac{2\kappa M(t)}{r} + \frac{4}{9}r^2\lambda^2 L(t)}}\right) \tag{92}$$

Из (91) следует, что относительная потеря массы пылевого облака (86) равна трём постоянным Хаббла $h(t)$:

$$h(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad \frac{\dot{M}(t)}{M(t)} = -3h(t). \tag{93}$$

Заметим, что пылевое облако вида (86) является лишь простейшим частным решением, существуют другие решения в которых потеря массы происходит по другому закону.

5 Ультрарелятивистский взрыв звезды

Рассмотрим внешнюю задачу о сферически симметричном ультрарелятивистском взрыве звезды. Вне звезды пространство заполнено межзвёздной пылью и ультрарелятивистским потоком продуктов взрыва звезды (излучением). Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu + N\, k_\mu k_\nu, \quad g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \rho, \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{94}$$

Здесь ρ, u^μ – плотность и четырёхскорость межзвёздной пыли; N, k^μ – плотность и четырёхскорость ультрарелятивистского потока продуктов взрыва. Уравнения неразрывности и геодезичности:

$$\nabla_\mu\left(\rho\, u^\mu\right) = 0, \quad \nabla_\mu\left(N\, k^\mu\right) = 0, \quad u^\mu\nabla_\mu u^\nu = 0, \quad k^\mu\nabla_\mu k^\nu = 0. \tag{95}$$

Четырёхвектор u^μ – времениподобный, k^μ – изотропный:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1, \quad g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0. \tag{96}$$

Используем метрику

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{dr - V(t,r)\,dt}{W(t,r)}\right)^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right). \tag{97}$$

Сферически симметричное решение уравнений (96):

$$u^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial r}, \qquad k^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = K\frac{\partial}{\partial t} + (V+W)\,K\frac{\partial}{\partial r}. \tag{98}$$

Система уравнений ОТО для метрики (97) с тензором энергии импульса (94):

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2-\frac{4}{9}r^3\lambda^2\right)-\frac{W^2-1}{2r}=-4\pi\kappa\, r\, N\, K^2, \tag{99}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+V\frac{\partial W}{\partial r}=4\pi\kappa\, r\, N\, K^2, \tag{100}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t}+K\frac{\partial V}{\partial r}+(V+W)\,\frac{\partial K}{\partial r}=4\pi\kappa\frac{r\, N\, K^3}{W}, \tag{101}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{V+W}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, N\right)=0. \tag{102}$$

При этом

$$\rho=\frac{1}{8\pi\kappa\, r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(V^2-W^2+1-\frac{4}{9}r^2\lambda^2\right)\right)-\left(1+\frac{V}{W}\right)N\, K^2. \tag{103}$$

Система уравнений (99, 100, 101, 102) описывает сферически симметричное гравитационное поле вне небесного тела (сверхновая, квазар) учитывая ультрарелятивистский поток излучения идущий от него.

6 Пространственно временная структура

Метрика вида (1) не только является ключом к объединению различных решений (Шварцшильда, де Ситтера, Фридмана и др.), но и позволяет, например, наиболее просто записать уравнения гидродинамической задачи, а затем проследить за судьбой падающей материи под горизонтом событий чёрной дыры [12]. Метрика вида (1) необходима для осуществления корректного предельного перехода из ОТО к задачам классической физики. Например, в классической механике Лагранжиан свободной частицы движущейся в поле скоростей V^i имеет следующий вид

$$L=\frac{1}{2}m\gamma_{ij}\left(\frac{dx^i}{dt}-V^i\right)\left(\frac{dx^j}{dt}-V^j\right). \tag{104}$$

Он в точности соответствует нерелятивистскому движению в гравитационном поле вида (1) если его записать в чуть более общем виде [13]:

$$ds^2=dt^2-\gamma_{ij}\left(dx^i-V^idt\right)\left(dx^j-V^jdt\right). \tag{105}$$

Метрика Бурланкова (105) является частным случаем метрики Арновитта – Дезера – Мизнера [14].

Локальная пространственно–временная структура четырёхмерного пространства событий задаётся *тетрадой*. А именно, тремя ковекторными полями (триадой): $e^{(1)}=$

$e^{(1)}_\mu dx^\mu$, $e^{(2)} = e^{(2)}_\mu dx^\mu$, $e^{(3)} = e^{(3)}_\mu dx^\mu$ задающими базис в *кокасательном расслоении* трёхмерного *пространственного распределения*; и одним ковекторным полем $e^{(0)} = e^{(0)}_\mu dx^\mu$ – *дифференциальной формой* времени [15]. Время *трансверсально* трёхмерному *пространственному распределению*. Взятые вместе $e^{(0)}$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$ задают базис в *линейном реперном расслоении* с группой Лоренца, и псевдоримановой метрикой пространства событий имеющей следующий вид

$$g_{\mu\nu} = e^{(0)}_\mu e^{(0)}_\nu - e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(3)}_\mu e^{(3)}_\nu. \tag{106}$$

$$g^{\mu\nu} e^{(0)}_\mu e^{(0)}_\nu = +1, \quad g^{\mu\nu} e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu = -1, \quad g^{\mu\nu} e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu = -1, \quad g^{\mu\nu} e^{(3)}_\mu e^{(3)}_\nu = -1. \tag{107}$$

Метрике Бурланкова (105) соответствует случай *безвихревой* дифференциальной формы времени

$$\oint e^{(0)} = 0, \qquad de^{(0)} = 0, \qquad e^{(0)} = \frac{\partial t}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{108}$$

При этом *интегральные многообразия* локального трёхмерного *пространственного распределения* образуют *слоение* пространства событий, *листами* которого являются гиперповерхности $t(x) = const$. Физически же условие (108) разрешает интегральную (не локальную) синхронизацию времени: интеграл от $e^{(0)}$ зависит только от начальной и конечной точки, но не от пути интегрирования. Из (107) и (108) получается уравнение Гамильтона – Якоби на функцию $t(x)$ – интегрально синхронизируемого времени используемого в метрике Бурланкова:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial t}{\partial x^\mu} \frac{\partial t}{\partial x^\nu} = 1. \tag{109}$$

При предельном переходе от ОТО к нерелятивистской физике функция $t(x)$, удовлетворяющая уравнению Гамильтона – Якоби, переходит в время Ньютона в классической механике, время в уравнении Шрёдингера в квантовой механике, и время в уравнении Эйлера в гидродинамике. Вот почему гидродинамические задачи [12] в координатах Пэнлеве–Гуллстранда формулируются гораздо проще.

7 Уравнения гравитационного поля

Рассмотрим проблему отрицательной плотности энергии возникающую в рамках ОТО. Согласно решениям (26), (85) любой произвольно заданной функции $F(\alpha, \beta)$ соответствует частное решение $V_{[F]}(t, r)$. Среди всевозможных частных решений существуют такие $V_{[F^\star]}(t, r)$, которые делают левую часть tt–уравнения ОТО отрицательной. Но в правой части tt–уравнения ОТО стоит положительно определённая плотность энергии обычной материи, таким образом решения $V_{[F^\star]}(t,r)$ в ОТО запрещены. Но с геометрической точки зрения не существует принципиальной разницы между решениями с положительной или отрицательной компонентой G_{tt} тензора Эйнштейна-Гильберта. Ограничение $G_{tt} \geq 0$ с геометрической точки зрения выглядит искусственным. Возникает интерес *изменить* уравнения гравитационного поля так, что бы допускался любой знак G_{tt}.

Найдём экстремум действия Гильберта не на произвольных мировых многообразиях (как это делается в ОТО), а только на тех которые допускают безвихревую дифференциальную форму времени. Согласно (108) для метрики таких многообразий допускается следующее представление

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial t}{\partial x^\mu}\frac{\partial t}{\partial x^\nu} - e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(3)}_\mu e^{(3)}_\nu. \tag{110}$$

Оставляя дифференциальную форму времени безвихревой, варьируем действие Гильберта по тринадцати полям: $t(x)$, $e^{(1)}_\mu(x)$, $e^{(2)}_\mu(x)$, $e^{(3)}_\mu(x)$:

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \left(T_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{6\pi\kappa} g_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi\kappa} G_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d_4 x. \tag{111}$$

Получаем следующую систему уравнений гравитационного поля:

$$\left(T^{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{6\pi\kappa} g^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi\kappa} G^{\mu\nu} \right) e^{(i)}_\nu = 0, \tag{112}$$

$$\nabla_\mu \left(\left(T^{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{6\pi\kappa} g^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi\kappa} G^{\mu\nu} \right) \frac{\partial t}{\partial x^\nu} \right) = 0. \tag{113}$$

Из-за локальной $SO(3)$ симметрии триады $e^{(1)}_\mu$, $e^{(2)}_\mu$, $e^{(3)}_\mu$ из двенадцати уравнений (112) линейно независимыми являются лишь девять. Уравнение (113) является дифференциальной формулировкой закона сохранения энергии. Обозначим P^μ сохраняющийся ток плотности энергии-импульса:

$$P^\mu = \left(T^{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{6\pi\kappa} g^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi\kappa} G^{\mu\nu} \right) \frac{\partial t}{\partial x^\nu}, \quad \nabla_\mu P^\mu = 0. \tag{114}$$

Если удовлетворены уравнения (112), то уравнение (113) будет удовлетворено автоматически в силу тождеств Гильберта. Для метрики (1) и тензора энергии-импульса (74) для отличных от нуля компонент P^μ получаем:

$$P^t = \epsilon, \quad P^r = V\epsilon, \quad \epsilon = \rho + \varepsilon + \frac{\lambda^2}{6\pi\kappa} - \frac{1}{8\pi\kappa\, r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^2 \right), \tag{115}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V \epsilon \right) = 0. \tag{116}$$

Девять линейно независимых уравнений (112) являются *общековариантной* формулировкой теории гравитации Бурланкова [13]. Не принадлежащие ОТО решения $V_{[F^{\star}]}(t, r)$ обладающие отрицательной G_{tt} принадлежат теории гравитации Бурланкова.

8 Заключение

Автор выражает благодарность Виктору Константиновичу Дубровичу и Дмитрию Евгеньевичу Бурланкову.

Список литературы

[1] Schwarzschild K. (1915). Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1. 189 – 196

[2] Reissner, H. (1916). *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie.* Annalen der Physik (in German). 50: 106–120.

[3] Nordström, G. (1918). *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory.* Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam. 26: 1201–1208.

[4] de Sitter W. (1917). Proc. Kon. Ned. Acad. Wet., 20: 229–243

[5] Friedman A. A. // Z. Phys. 1922. V. 10. P. 377; 1924. V. 21. P. 306;
Фридман А. А. *Мир как пространство и время.* М.: Наука, 1965.

[6] Richard C. Tolman *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* Vol. 20, No. 3 (Mar. 15, 1934), pp. 169-176

[7] Painleve P. (1921). C. R. Acad. Sci. (Paris) **173**, 677-680

[8] Gullstrand A. (1922). Arkiv. Mat. Astron. Fys. **16**, 1

[9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля.* М.: Наука, 1967

[10] Hilbert D. (1915). Gottingen Nachr. **3** 395

[11] Бурланков Д. Е. *Анализ общей теории относительности*: Монография. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. – 239 с.

[12] Рубан В. П. *Идеальная гидродинамика снаружи и внутри чёрной дыры: Гамильтоново описание в координатах Пенлеве – Гуллстранда.* ЖЭТФ, 2014, том 146, вып. 1 (7). стр. 96–104

[13] Бурланков Д. Е. *Время, пространство, тяготение.* – М. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2006. – 420 с.

[14] Arnovitt R., Deser S., Misner C. W. Phys. Rev., 1959, V. **116**, 1322

[15] Сарданашвили Г. А. *Современные методы теории поля. Т. 5: Гравитация.* – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2011. – 176 с.