Три задачи по теории относительности

Губанов Сергей Юрьевич*

30 декабря 2008

Содержание

1 Задача о высоте небоскрёба

Предварительное замечание о системе координат в окрестности массивного тела. Описывая гравитационное поле массивного тела часто используют координатную систему и метрику открытую в 1915 году одним из творцов современной теоретической астрофизики известным астрономом Карлом Шварцшильдом. Однако, система координат Шварцшильда не охватывает всего пространства событий и обладает особенностью на горизонте. Существует другая координатная система избавленная от этого недостатка. Она была открыта в 1921 году французским математиком (и премьер-министром) Полем Пэнлеве [5]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dr + \sqrt{\frac{2kM}{r}}\, dt \right)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2. \quad (1)$$

Далее мы будем использовать именно её.

Радарное расстояние. *Радар испускает световой сигнал и измеряет время его распространения до удалённого зеркала и обратно. Время делится пополам и умножается на с, полученое значение называется радарным расстоянием от радара до удалённого зеркала.* За эталон расстояния в один метр в 1983 году принято такое радарное расстояние, когда на распространение света туда и обратно тратится $2/299'792'458$ доли секунды. Прежний эталон метра (1960 года) был равен $1'650'763.73$ длины волны излучения криптона-86, генерируемого при переходе оболочечных электронов с уровня $2p10$ на уровень $5d5$. Эталон секунды с 1967 года определяется как $9'192'631'770$ периодов излучения, соответствующего переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры изотопа цезия с атомным весом 133.

Определить радарную высоту небоскрёба. Рассмотрим две задачи: сначала радар с хронометром установим на первом этаже, а зеркало на последнем, потом наоборот.

Пусть координаты $r = R_1$ и $r = R_2$ соответствуют первому и последнему этажам небоскрёба. Самое важное в этой задаче то, что хронометры идут с разной скоростью в зависимости от того на каком радиусе r они находятся:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 r}}\, dt. \quad (2)$$

*S.Yu.Gubanov@inbox.ru

Уравнения распространения лучей света выводятся из условия $ds^2 = 0$. Для лучей движущихся вверх $\frac{dr}{dt}^{+} > 0$ и вниз $\frac{dr}{dt}^{-} < 0$ получаем:

$$\frac{dr}{dt}^{\pm} = \pm\, c - \sqrt{\frac{2kM}{r}}. \tag{3}$$

Решая эти уравнения, получаем для полусуммы:

$$c\,\frac{t_{R_1\to R_2} + t_{R_2\to R_1}}{2} = R_2 - R_1 + \frac{2kM}{c^2}\,\ln\frac{R_2 - \frac{2kM}{c^2}}{R_1 - \frac{2kM}{c^2}}. \tag{4}$$

Следовательно, радарная высота небоскрёба с точки зрения жителей первого и последнего этажей будет равна соответственно:

$$h_1(R_1, R_2) = \sqrt{1 - \frac{2kM}{R_1}}\left(R_2 - R_1 + \frac{2kM}{c^2}\,\ln\frac{R_2 - \frac{2kM}{c^2}}{R_1 - \frac{2kM}{c^2}}\right), \tag{5}$$

$$h_2(R_1, R_2) = \sqrt{1 - \frac{2kM}{R_2}}\left(R_2 - R_1 + \frac{2kM}{c^2}\,\ln\frac{R_2 - \frac{2kM}{c^2}}{R_1 - \frac{2kM}{c^2}}\right). \tag{6}$$

Высоты разные.

Почему радарные высоты разные? Причина несовпадения радарных высот в том, что хронометр на первом этаже идёт медленее, чем на последнем.

Так как же надо измерять высоту небоскрёба если за эталон измерения расстояния принят радарный метод? С помощью радарного метода можно измерять лишь бесконечно малые расстояния. Конечные расстояния определяются интегрированием бесконечно малых. То есть, чтобы измерить высоту небоскрёба надо измерить радарным способом (ведь именно он принят за эталон) высоту каждого этажа по отдельности, а потом всё сложить. Разложим полученные функции в ряд:

$$h_1(r, r + dr) = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 r}}} + O(dr)^2, \tag{7}$$

$$h_2(r, r + dr) = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 r}}} + O(dr)^3. \tag{8}$$

Как и ожидалось, функции совпадают друг с другом лишь в линейном по dr приближении. Интегрируя, получаем ответ:

$$h = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 r}}} \tag{9}$$

$$= R_2\sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 R_2}} - R_1\sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 R_1}} + \frac{kM}{c^2}\,\ln\left(\frac{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 R_2}}\right)\frac{c^2 R_2}{kM} - 1}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2kM}{c^2 R_1}}\right)\frac{c^2 R_1}{kM} - 1}\right) \tag{10}$$

$$\approx (R_2 - R_1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{2kM}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{2kM}{c^2}\right)^2 + \ldots \tag{11}$$

О формальном. Если бы математики увидели предыдущие вычисления они бы снисходительно улыбнулись. Любому математику известно, что говорить о расстояниях в пространстве можно лишь после введения в нём метрики.

Определить метрику пространства. Пространственная метрика зависит от системы отсчёта. В рамках рассматриваемой задачи, мы определим пространственные метрики в двух системах отсчёта: в системе отсчёта неподвижной относительно жильцов небоскрёба, и в системе отсчёта неподвижной относительно наблюдателей свободно падающих из бесконечности с нулевой начальной скоростью.

Построение репера системы отсчёта жильцов небоскрёба. Сначала находим четырёх-вектор скорости жильца небоскрёба живущего на радиусе r:

$$\frac{dx^{\mu}}{ds}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}},0,0,0\right\}. \tag{12}$$

В четырёхмерном пространстве событий этот вектор указывает направление увеличения собственного времени наблюдателя. Континуум наблюдателей задаёт континуум таких векторов – векторное поле e_0^{μ}, оно наряду ещё с тремя другими векторными полями e_1^{μ}, e_2^{μ} и e_3^{μ}, задающими ориентацию в пространстве, входит в ортогональный репер искомой системы отсчёта. Векторное поле e_0^{μ} – времени-подобно: $g_{\mu\nu}\,e_0^{\mu}\,e_0^{\nu}=+1$. Векторные поля e_1^{μ}, e_2^{μ} и e_3^{μ} – пространственно-подобны, их квадраты равны: -1. Между собой они ортогональны: $g_{\mu\nu}\,e_a^{\mu}\,e_b^{\nu}=\eta_{ab}$. Зная e_0^{μ} можно пользуясь процедурой ортогонализации выбрать (конкретизировать) векторные поля e_1^{μ}, e_2^{μ} и e_3^{μ}. Таким образом, для ортогонального репера e_a^{μ} искомой системы отсчёта получаем (сразу же раскладываем его по тензорному базису $e_a=e_a^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$):

$$e_0=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}}\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\quad e_1=\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\sqrt{\frac{2kM}{c^2r}}}{\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}}\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\quad e_2=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta},\quad e_3=\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{13}$$

Для ко-репера e_{μ}^{a} искомой системы отсчёта получаем (сразу же раскладываем его по тензорному базису $e^a=e_{\mu}^{a}dx^{\mu}$):

$$e^0=\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}\,cdt-\frac{\sqrt{\frac{2kM}{c^2r}}}{\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}}\,dr,\quad e^1=\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}},\quad e^2=r\,d\theta,\quad e^3=r\,\sin\theta\,d\varphi. \tag{14}$$

Построение репера системы отсчёта свободно падающих наблюдателей. Находим четырёх-вектор скорости свободно падающих из бесконечности с нулевой начальной скоростью наблюдателей:

$$\frac{dx^{\mu}}{ds}=\left\{1,-\sqrt{\frac{2kM}{c^2r}},0,0\right\}. \tag{15}$$

Следовательно, для репера $\bar{e}_a^{\mu}$ искомой системы отсчёта получаем:

$$\bar{e}_0=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\sqrt{\frac{2kM}{c^2r}}\,\frac{\partial}{\partial r},\quad \bar{e}_1=\frac{\partial}{\partial r},\quad \bar{e}_2=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \bar{e}_3=\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{16}$$

Для ко-репера $\bar{e}_{\mu}^{a}$, результат таков:

$$\bar{e}^0=c\,dt,\quad \bar{e}^1=dr+\sqrt{\frac{2kM}{r}}\,dt,\quad \bar{e}^2=r\,d\theta,\quad \bar{e}^3=r\,\sin\theta\,d\varphi. \tag{17}$$

Каким преобразованием связаны реперы найденных систем отсчёта? Переход от репера неподвижной системы отсчёта e_a^{μ} к реперу свободно падающей $\bar{e}_a^{\mu}$ осуществляется преобразованием Лоренца (со скоростью $V=\sqrt{\frac{2kM}{r}}$):

$$\bar{e}_0^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}}\left(e_0^{\mu}-\sqrt{\frac{2kM}{c^2r}}\,e_1^{\mu}\right), \tag{18}$$

$$\bar{e}_1^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2kM}{c^2r}}}\left(-\sqrt{\frac{2kM}{c^2r}}\,e_0^{\mu}+e_1^{\mu}\right), \tag{19}$$

$$\bar{e}_2^{\mu}=e_2^{\mu}, \tag{20}$$

$$\bar{e}_3^{\mu}=e_3^{\mu}. \tag{21}$$

Это общее правило. Реперы разных систем отсчёта всегда получаются друг из друга тем или иным преобразованием Лоренца $L^a_{\ b}$:

$$e_a^{\prime\mu}=e_b^{\mu}\,L^b_{\ a},\quad e_{\mu}^{\prime a}=L^a_{\ b}\,e_{\mu}^{b},\quad \eta_{ab}\,L^a_{\ c}\,L^b_{\ d}=\eta_{cd}. \tag{22}$$

О преобразованиях. Преобразования $x^\mu \to x'^\mu$ меняют систему координат (и действуют только на тензорные компоненты: μ, ν). Преобразования Лоренца $e_a \to e'_a$ меняют систему отсчёта (и действуют только на лоренцевские компоненты: a, b). Преобразования координат и преобразования Лоренца – есть две абсолютно не связанные друг с другом операции. Метрический тензор пространства событий равен:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, e^a_\mu\, e^b_\nu \equiv e^0_\mu\, e^0_\nu - e^1_\mu\, e^1_\nu - e^2_\mu\, e^2_\nu - e^3_\mu\, e^3_\nu, \tag{23}$$

он не имеет лоренцевских индексов – не зависит от системы отсчёта, он имеет тензорные индексы – зависит от системы координат. Система координат и система отсчёта – два разных понятия никак не связанных друг с другом.

Физический смысл репера системы отсчёта. Каждый наблюдатель характеризуется своей мировой линией. Система отсчёта задаётся континуумом наблюдателей, мировые линии которых образуют конгруэнцию (конгруэнцию требуют потому, что с хаотически летающими наблюдателями систему отсчёта связывать не удобно, да и едва ли имеет смысл – слишком мала будет область её применимости). Четырёх-вектор скорости наблюдателя $\frac{dx^\mu}{ds}$ – есть вектор касательный к его мировой линии, он указывает направление увеличения собственного времени наблюдателя. Объединение векторов $\frac{dx^\mu}{ds}$ всех наблюдателей выбранной конгруэнции даёт векторное поле e^μ_0. Тройка векторных полей e^μ_1, e^μ_2, e^μ_3 достраивается по заданному вектору e^μ_0 по алгоритму ортогонализации. Они в каждой точке пространства событий задают три пространственных направления выбранной системы отсчёта.

Снова о преобразованиях. Я раскидал по полу несколько предметов, а ещё нарисовал на полу довольно криволинейную координатную сетку (какую смог – такую и нарисовал). Я стою посередине комнаты и поворачиваюсь. Я поворачиваюсь, а предметы остаются на месте. Остаётся на месте и нарисованная на полу координатная система. Что изменяется? Изменяется мой репер: $e'^\mu_a = e^\mu_b L^b{}_a$. Теперь Вы нарисовали на полу другую (тоже довольно криволинейную) координатную сетку. Из-за того что координатная система стала другой $x'^\mu = f^\mu(x)$ предметы своих мест не изменили, просто теперь мы им стали приписывать другие координаты. Не изменилась и моя ориентация – мой репер прежний. Операция замены координат: $x'^\mu = f^\mu(x)$, и операция перехода в другую систему отсчёта: $e'^\mu_a = e^\mu_b L^b{}_a$, друг с другом никак не связаны.

Как в четырёхмерном пространстве событий в выбранной системе отсчёта появляется трёхмерное пространство? Система отсчёта определяется ортогональным репером e^μ_a (если он вдруг не ортогональный, то его всегда можно ортогонализовать). Как только ортогональный репер задан, мы можем выбрать произвольную точку пространства событий и начать перемещаться из неё в соседние точки вдоль направлений задаваемых произвольной линейной комбинацией из тройки векторов: e^μ_1, e^μ_2, e^μ_3. Все точки достижимые указанным способом образуют в пространстве событий трёхмерный слой – это и есть трёхмерное пространство. Для того чтобы попасть в другой слой, необходимо переместиться вдоль вектора e^μ_0.

Тут может возникнуть вопрос, а сколько слоёв? Вдруг все точки пространства событий достижимы указанным способом, то есть принадлежат одному и тому же слою? В евклидовом случае такое быть может (мне известен простой пример). В псевдо-евклидовом, то что слоёв много, по видимому, гарантируется тем, что никаким вещественным преобразованием Лоренца времени-подобный вектор (e^μ_0) не может быть превращён в пространственно-подобный (e^μ_1, e^μ_2 или e^μ_3), и наоборот тоже невозможно. Таким образом, времени-подобные и пространственно-подобные направления никогда не перемешиваются.

Какова метрика у пространственного слоя? Координаты двух бесконечно близких точек пространства событий отличаются на бесконечно малое приращение dx^μ. Если эти точки принадлежат одному пространственному слою, то это приращение не должно быть параллельно вектору e^μ_0. Математически это описывается следующей дифференциальной связью: $e^0_\mu\, dx^\mu = 0$. Следовательно, метрика пространственного слоя получается в результате решения следующей системы дифференциальных связей:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^0_\mu \, dx^\mu &=& 0, \\ d\ell^2 &=& \left(e^1_\mu \, dx^\mu\right)^2 + \left(e^2_\mu \, dx^\mu\right)^2 + \left(e^3_\mu \, dx^\mu\right)^2 . \end{array} \right. \tag{24}$$

В том частном случае когда $e^0_\mu \, dx^\mu = c\,dt$ (или может быть сведено к $F\,dt$ с неким F – интегрирующим множителем) уравнение пространственного слоя задаётся в виде $t = const$, поэтому может в прямом смысле называться гиперповерхностью постоянного времени. В общем же случае, дифференциальная связь $e^0_\mu \, dx^\mu = 0$ не интегрируема и гиперповерхности постоянного времени в прямом смысле не существует, есть просто пространственный слой (или, если угодно, *неголономная гиперповерхность одновременности*).

Ответ. Теперь мы можем написать метрику пространственного слоя в системе отсчёта связанной с жильцами небоскрёба:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c\,dt - \frac{\sqrt{\frac{2kM}{c^2 r}}}{1-\frac{2kM}{c^2 r}} \, dr &=& 0, \\ d\ell^2 &=& \frac{dr^2}{1-\frac{2kM}{c^2 r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2, \end{array} \right. \tag{25}$$

Дифференциальная связь $c\,dt - \frac{\sqrt{\frac{2kM}{c^2 r}}}{1-\frac{2kM}{c^2 r}} \, dr = 0$ интегрируема, она эквивалентна $dt' = 0$, где t' – времениподобная координата Шварцшильда. У неё есть особенность на горизонте: $r = \frac{2kM}{c^2}$, поэтому я и отказался от координатной системы Шварцшильда в пользу координатной системы Пэнлеве как только узнал о её существовании.

Метрика пространственного слоя в системе отсчёта свободно падающих из бесконечности с нулевой начальной скоростью наблюдателей:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dt &=& 0, \\ d\ell^2 &=& dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2. \end{array} \right. \tag{26}$$

Высоту небоскрёба с точки зрения его жильцов мы уже вычислили раньше. С точки зрения свободно падающих наблюдателей высота этого небоскрёба просто равна разности: $R_2 - R_1$, их пространственный слой плоский.

Небольшое замечание о синхронизируемости часов. В рассмотренной глобальной свободно падающей системе отсчёта для любого замкнутого пути выполняется

$$\oint \bar{e}^0_\mu dx^\mu = c \oint dt = 0, \tag{27}$$

то есть в ней можно глобально синхронизировать все часы.

2 Задача о длине поезда и рельсов

Решая предыдущую задачу мы научились в произвольной системе отсчёта строить метрику пространственного слоя. Теперь надо научиться понимать в какой области её можно интегрировать, чтобы получить, например, длину линии (площадь поверхности, объём области).

Решим следующую задачу. Рельсы уложены по окружности радиуса R и по ним едет поезд со скоростью V. Длина движущегося поезда равна длине неподвижных рельсов, так что последний вагон состава сцеплен с паровозом – состав замкнут. Если состав остановить, какова будет его длина? Существует ещё вторая задача, зеркальная первой. Где-то в космосе крутится "Чёртово колесо", к нему приделаны рельсы. На рельсах неподвижно стоит железнодорожный состав. Длина вращающихся рельсов равна длине неподвижного состава, так что последний вагон состава сцеплен с паровозом – состав замкнут. Если "Чёртово колесо" остановить, какова будет длина рельсов?

Сначала введём понятие размера физического объекта. *Размер физического объекта в выбранной системе отсчёта равен расстоянию между крайними точками области пространства, которую он занимает в один и тот же момент времени.* Обратите внимание на то, что расстояние между точками пространства зависит от системы отсчёта, так как требуется "один и тот же момент времени", но расстояние между точками пространства не зависит от того движется ли сейчас мимо них сам физический объект или не движется, или даже если он уже отсутствует. Свойством "расстояния" обладает само пространство, а физический объект получает свойство иметь "размер" только потому, что он в пространство погружён.

Решение. В данной задаче, математически, мы имеем дело с псевдоцилиндром:

$$ds^2 = c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2, \tag{28}$$

здесь координата $\bar{x}$ направлена вдоль периметра окружности и изменяется от 0 до $2\pi R$. Ко-репер неподвижной системы отсчёта чрезвычайно прост:

$$\bar{e}^0 = c\, d\bar{t}, \quad \bar{e}^1 = d\bar{x}. \tag{29}$$

Ко-репер движущейся системы отсчёта:

$$e^0 = \frac{c\, d\bar{t} - \frac{V}{c}\, d\bar{x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad e^1 = \frac{-V\, d\bar{t} + d\bar{x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{30}$$

Дадим определение согласованности системы координат с системой отсчёта. *Будем говорить, что система координат согласована с системой отсчёта, если удалось выбрать систему координат так, что векторы касательные к её координатным осям параллельны векторам репера системы отсчёта. При этом дифференциальные формы ко-репера пропорциональны дифференциалам соответствующих координат.*

В данном случае нам крупно повезло, обе диффернециальные формы e^0 и e^1 представимы в виде полных дифференциалов, поэтому мы можем выбрать новую систему координат $\{ct, x\}$ согласованную с репером движущейся системы отсчёта. Дифференциалы новых координат такие:

$$e^0 = c\, dt = \frac{c\, d\bar{t} - \frac{V}{c}\, d\bar{x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad e^1 = dx = \frac{d\bar{x} - V\, d\bar{t}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{31}$$

Одномерный пространственный метрический тензор в движущейся системе отсчёта тривиален:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dt & = & 0, \\ d\ell^2 & = & dx^2. \end{array} \right. \tag{32}$$

Для вычисления длины окружности нужно понять в каких пределах брать интеграл по dx. Надо перейти от связи между дифференциалами координат к связи между самими координатами. Тут не всё так просто как может показаться на первый взгляд. Дело в том, координаты $\{c\bar{t}, \bar{x}\}$ и координаты $\{c\bar{t}, \bar{x} + 2\pi nR\}$ соответствуют одной и той же точке пространства событий для любого целого n. На дифференциалах координат эта неоднозначность не сказывается. Переход от координат $\{c\bar{t}, \bar{x} + 2\pi nR\}$ к координатам $\{ct_{(n)}, x_{(n)}\}$ таков:

$$c\, t_{(n)} = \frac{c\,\bar{t} - \frac{V}{c}\,(\bar{x} + 2\pi nR)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_{(n)} = \frac{(\bar{x} + 2\pi nR) - V\,\bar{t}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{33}$$

Координатные линии новой системы координат представляют собой многократно пересекающиеся друг с другом псевдовинтовые линии. Шаг через который они пересекаются:

$$c\,\Delta t = c\,|t_{(n+1)} - t_{(n)}| = \frac{V}{c}\,\frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \Delta x = |x_{(n+1)} - x_{(n)}| = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{34}$$

Следовательно длина окружности во вращающейся с постоянной угловой скоростью $\Omega = V/R$ системе отсчёта равна:

$$\ell = \int\limits_0^{\Delta x} dx = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R^2}{c^2}}}. \tag{35}$$

Именно такой и будет длина железнодорожного состава (в первой задаче) и длина рельсов (во второй задаче) после останова. Так что, для предотвращения катастрофы, лучше их не останавливать.

3 Задача о площади поверхности и объёме вращающейся сферы

Задача похожа на предыдущую, только увеличена размерность. Сфера радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$. Найти её объём и площадь поверхности в сопутствующей системе отсчёта.

Решение. Система координат и метрика:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2. \tag{36}$$

Четырёх-вектор скорости какого-либо участка вращающейся сферы:

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2 \sin^2(\theta)}{c^2}}} \left\{1, 0, 0, \frac{\Omega}{c}\right\}. \tag{37}$$

Ко-репер неподвижной системы отсчёта:

$$\bar{e}^0 = c\, dt, \quad \bar{e}^1 = dr, \quad \bar{e}^2 = r\, d\theta, \quad \bar{e}^3 = r \sin(\theta)\, d\varphi. \tag{38}$$

Ко-репер вращающейся системы отсчёта получается с помощью преобразования Лоренца в плоскости векторов $\bar{e}_0$ и $\bar{e}_3$:

$$e^0 = \frac{\bar{e}^0 - \frac{V}{c}\,\bar{e}^3}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad e^1 = \bar{e}^1, \quad e^2 = \bar{e}^2, \quad e^3 = \frac{-\frac{V}{c}\,\bar{e}^0 + \bar{e}^3}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad V = \Omega\, r\, \sin(\theta). \tag{39}$$

Запишем ко-репер вращающейся системы отсчёта в явном виде:

$$e^0 = \frac{c\, dt - \frac{\Omega\, r^2 \sin^2(\theta)}{c}\, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2 \sin^2(\theta)}{c^2}}}, \quad e^1 = dr, \quad e^2 = r\, d\theta, \quad e^3 = \frac{r \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2 \sin^2(\theta)}{c^2}}} \left(d\varphi - \Omega\, dt\right). \tag{40}$$

Дифференциальная форма e^3 пропорциональна полному дифференциалу $d\psi = d\varphi - \Omega\, dt$. Как и в предыдущей задаче, преобразование самих координат неоднозначно, так как координаты φ и $\varphi + 2\pi n$ физически соответствуют одной и той же точке при любом целом n.

$$\psi_{(n)} = (\varphi + 2\pi\, n) - \Omega\, t, \quad \Delta\psi = |\psi_{(n+1)} - \psi_{(n)}| = 2\pi. \tag{41}$$

Таким образом, область изменения новой координаты ψ: от 0 до 2π. Метрика пространственного слоя:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c\, dt - \frac{\Omega}{c} \frac{r^2 \sin^2(\theta) d\psi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2 \sin^2(\theta)}{c^2}} & = & 0, \\ d\ell^2 & = & dr^2 + r^2 d\theta^2 + \frac{r^2 \sin^2(\theta) d\psi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2 \sin^2(\theta)}{c^2}}. \end{array} \right. \tag{42}$$

Дифференциальная форма e^0 не может быть представлена в виде полного диффернциала ни с каким интегрирующим множителем. Следовательно, пространственный слой во вращающейся системе отсчёта не является в прямом смысле гиперповерхностью постоянного времени – не существует такого времени, чтобы его дифференциал был пропорционален e^0. Как бы то ни было, на трёхмерной метрике $d\ell^2$ это обстоятельство никак не сказывается.

Ответ. Площадь поверхности вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω сферы радиуса R в сопутствующей системе отсчёта:

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\, R^2 \int\limits_0^\pi \frac{\sin(\theta)\, d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R^2 \sin^2(\theta)}{c^2}}} && (43)\\
&= \frac{2\pi\, c\, R}{\Omega} \ln \frac{1 + \frac{\Omega\, R}{c}}{1 - \frac{\Omega\, R}{c}} && (44)\\
&\approx 4\pi\, R^2 \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^6 + \ldots\right), && (45)
\end{aligned}
$$

её объём:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{2\pi\, c}{\Omega} \int\limits_0^R \ln \frac{1 + \frac{\Omega\, r}{c}}{1 - \frac{\Omega\, r}{c}}\, r\, dr && (46)\\
&= \frac{\pi c^3}{\Omega^3} \left(\ln \frac{1 - \frac{\Omega R}{c}}{1 + \frac{\Omega R}{c}} + \frac{\Omega R}{c}\left(2 + \frac{\Omega R}{c} \ln \frac{1 + \frac{\Omega R}{c}}{1 - \frac{\Omega R}{c}}\right)\right) && (47)\\
&\approx \frac{4}{3}\pi\, R^3 \left(1 + \frac{1}{5}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 + \frac{3}{35}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^4 + \frac{1}{21}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^6 + \ldots\right). && (48)
\end{aligned}
$$

Список литературы

[1] Д. Е. Бурланков, *Динамика пространства*, монография, Нижний Новгород, ННГУ, 2005, 179 стр.

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория Поля.* М.: Наука, 1988.

[3] Arnovitt R., Deser S., and Misner C.W. Phys. Rev. 116, 1322 (1959).

[4] С. Чандрасекар Математическая теория чёрных дыр. М.: Мир, 1986 [Chandrasekhar S., The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford Univ. Press, 1983].

[5] Painleve P. C.R. Acad. Sci. (Paris). 173, 677 (1921).